A1 MINTA(A) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)}$.

A nevező zérushelyeiben a függvény nem értelmezett: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$, ezek a függvény szakadási helyei. Ha $x = 2$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0} = \lim_{x \to 2+} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ugyanígy adódik $\displaystyle\lim_{x \to 2-} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2-} \frac{x+4}{x+1} = 2.$

Tehát a két féloldali határérték létezik, és értékük megegyezik. Így a függvénynek hézagpontja (megszűntethető szakadása) van az $x = 2$ helyen.

Ha $x = -1$

$$\lim_{x \to -1+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-9}{-3 \cdot 0+} = \infty \text{ vagy}$$

$$\lim_{x \to -1+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} \underset{h=x+1}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{(h-3)(h+3)}{(h-3)h} = \lim_{h \to 0+} \frac{(h+3)}{h} = \lim_{h \to 0+} 1 + \frac{3}{h} = \infty$$

Ugyanígy adódik $\displaystyle\lim_{x \to -1-} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-9}{-3 \cdot 0-} = -\infty$

Tehát a két féloldali határérték $\pm\infty$ a szakadás lényeges (másodfajú), a függvénynek pólusa van az $x = -1$ helyen.

2. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

$$\text{a)} \quad \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad \text{b)} \quad \ln(\sin(2\text{x}))$$

(5 pont)

Megoldás. a) $\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x^2+1}} \right)' =$

$$= \frac{4x \cdot x\sqrt{x^2+1} - (2x^2-1)\left(\sqrt{x^2+1} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{(x\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{4x^2\sqrt{x^2+1} - (2x^2-1)\left(\dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^4+x^2} =$$

$$= \frac{4x^2\sqrt{x^2+1} - \left(\dfrac{4x^4-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^4+x^2} = \frac{(4x^4+4x^2)-(4x^4-1)}{(x^4+x^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{4x^2+1}{(x^4+x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

b) $$(\ln(\sin(2x)))' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot (\sin(2x))' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot (2x)' = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = 2\mathrm{ctg}(2x).$$

3. Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = x\ln(x)$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1.$

A derivált zérushelye $\ln(x) + 1 = 0$, azaz $\ln(x) = -1$, $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Ha $x < 1/e$, akkor $\ln(x) < -1$, így a derivált negatív, tehát a függvény szig. mon. csökken. Ha $x > 1/e$, akkor a derivált pozitív, a függvény szig. mon. növő.

x	$(0, 1/e)$	$1/e$	$(1/e, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

A lokális minimum értéke $-\dfrac{1}{e}$.

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozza meg az egyenletét!

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

(5 pont)

Megoldás. A függvénynek szakadási helye van az $x = 1$-ben

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = \infty,$$

tehát az $x = 1$ egyenes a függvény függőleges asziptotája.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a $\pm\infty$-ben is vízszintes aszimptotája az $y = 1$ egyenes.