

# A1 MINTA(B) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{3x}}$$

(5 pont)

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{3x}} &= \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \text{L'H} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \text{L'H} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9e^{3x}} = \frac{2}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

2. Írja fel az alábbi függvény  $x_0 = 1$  ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = x^3 \cos(3x - 3)$$

(5 pont)

**Megoldás.**  $f(1) = 1^3 \cos(0) = 1.$

$$f'(x) = 3x^2 \cos(3x - 3) - 3x^3 \sin(3x - 3).$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 \cos(0) - 3 \cdot 1^3 \sin(0) = 3.$$

Az érintő egyenlete

$$y = 3(x - 1) + 1.$$

3. Ha egy adott termék előállítására  $x$  petákat költünk, akkor azt később  $10 + 12\sqrt{x}$  petákért tudjuk eladni. Mennyit költsünk az előállításra, hogy a hasznunk a lehető legtöbb legyen termékenként? (5 pont)

**Megoldás.** Az egy terméken keletkezett hasznunk

$$h(x) = (10 + 12\sqrt{x}) - x,$$

ahol  $x \in (0, \infty)$  lehet. Ekkor keresve a  $h(x)$  pozitív számokon vett globális maximumát

$$h'(x) = \frac{12}{2\sqrt{x}} - 1.$$

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyeit  $\frac{12}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ , ha  $6 = \sqrt{x}$ , azaz  $x = 36$ .

$x$	$(0, 36)$	$36$	$(36, \infty)$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Azaz  $x = 36$ -ban globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, értéke itt  $10 + 12 \cdot 6 - 36 = 46$ . Tehát 36 petákat kell költenünk egy termék előállítására, hogy hasznunk termékenként a maximális 46 peták legyen.

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az  $f$  függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

(5 pont)

**Megoldás.** Az értelmezési tartomány  $\mathbb{R}$ . A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját

$$f''(x) = (x^3 - 3x^2)'' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6.$$

Ennek zérushelye  $6x - 6 = 0$ , azaz  $x = 1$ -ben van.

$x$	$(-\infty, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f''$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\frown$	infl.	$\smile$

Mivel a derivált  $x < 1$ -re negatív, így ott konkáv a függvénygrafikon.  $x > 1$  esetén a derivált pozitív, így ott konvex a függvény. Az  $x = 1$ -ben inflexiós pontja van a függvénynek.