

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + \sqrt{5+x} = 1 \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. A gyökvonás miatt $x + 5 \geq 0$, azaz $x \geq -5$ kikötést kell tennünk.

(1 pont)

Átrendezve az egyenletet

$$x + \sqrt{5+x} = 1$$

$$\sqrt{5+x} = 1-x \quad \text{a négyzetre emelés előtt } 1-x \geq 0$$

kikötést kell tennünk, azaz $1 \geq x$

$$5+x = (1-x)^2$$

$$5+x = 1-2x+x^2 \quad / -x-5$$

$$0 = x^2 - 3x - 4 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel x_1 nem felel meg az $x \leq 1$ feltételnek, ezért ez hamis gyök. VAGY visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$4 + \sqrt{5+4} = 4 + 3 = 7 \neq 1$$

$$-1 + \sqrt{5-1} = -1 + 2 = 1$$

Így csak az $x_2 = -1$ a helyes megoldás.

(1 pont)

2. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x) = \frac{x-4}{2x+1} \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. A függvény $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ -en értelmezett. Az invertálhatósághoz az kell, hogy bármely $a, b \in D_f$ -re az $f(a) = f(b)$ egyenlőségből következzen, hogy $a = b$. Ebben az esetben:

$$\frac{a-4}{2a+1} = \frac{b-4}{2b+1}$$

$$(a-4)(2b+1) = (b-4)(2a+1)$$

$$2ab - 8b + a - 4 = 2ab - 8a + b - 4$$

$$-8b + a = -8a + b$$

$$9a = 9b \quad \text{azaz } a = b, \quad \text{így a függvény invertálható.} \quad (2 \text{ pont})$$

Ha $f(x) = y$, akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x .

$$y = \frac{x-4}{2x+1}$$

$$2xy + y = x - 4$$

$$x(2y-1) = -y-4 \quad \text{feltéve, hogy } 2y-1 \neq 0, \text{ azaz } y \neq \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-y-4}{2y-1} = \frac{y+4}{1-2y}. \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{Így az inverz } f^{-1}(x) = \frac{x+4}{1-2x}, \text{ minden } \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}. \quad (1 \text{ pont})$$

3. Végezze el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5$ és $q(x) = x^2 - 2x + 3$. Ellenőrizze az osztás helyességét is! (5 pont)

Megoldás.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5 : (x^2 - 2x + 3) = (x^2 - 2x - 4) \\
 \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} \\
 - 2x^3 - 5 \\
 \underline{- 2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 - 4x^2 + 6x - 5 \\
 \underline{- 4x^2 + 8x - 12} \\
 - 2x + 7
 \end{array}$$

(3 pont)

Azaz

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x - 4) + (-2x + 7) &= (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 6x - 4x^2 + 8x - 12) + (-4x - 2) = \\
 &= (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 12) - 2x + 7 = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5.
 \end{aligned}$$

(2 pont)

4. Vizsgálja meg a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2n - 1}$$

(5 pont)

Megoldás. Vizsgálva a monotonitást:

$$\begin{aligned}
 a_n &\stackrel{>}{<} a_{n+1} \\
 \frac{\sqrt{n}}{2n - 1} &\stackrel{>}{<} \frac{\sqrt{n+1}}{2n + 2 - 1} \\
 (\sqrt{n})(2n + 1) &\stackrel{>}{<} (\sqrt{n+1})(2n - 1) \quad \text{mivel } n > 0 \\
 n(2n + 1)^2 &\stackrel{>}{<} (n + 1)(2n - 1)^2 \\
 4n^3 + 4n^2 + n &\stackrel{>}{<} 4n^3 - 4n^2 + n + 4n^2 - 4n + 1 \\
 4n^2 + 4n - 1 &> 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát a sorozat monoton csökkenő.}
 \end{aligned}$$

(2 pont)

A határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot 1}{n \left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

(1 pont)

A sorozat korlátos. A legkisebb felső korlátja a monotonitás miatt az első elem $a_1 = \frac{\sqrt{1}}{2 - 1} = 1$. Legnagyobb alsó korlátja a határérték, azaz a 0.

(2 pont)