

A1 MINTA(A) 1. zárthelyi - MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg $\mathbb{R}$ -en a következő egyenletet, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$x + 3 = \sqrt{x + 5}$$

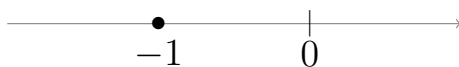
Megoldás. A gyökvonás miatt $x + 5 \geq 0$, azaz $x \geq -5$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk (fel kellene tennünk, hogy $x + 3 > 0$, azaz $x > -3$):

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x + 5 \\ x^2 + 6x + 9 &= x + 5 \quad / -x - 5 \\ x^2 + 5x + 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = -1, -4.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-1 + 3 = 2 = \sqrt{-1 + 5} = \sqrt{4} \text{ az } x = -1 \text{ a helyes megoldás,}$$

$$-4 + 3 = -1 \neq \sqrt{-4 + 5} = \sqrt{1} = 1 \text{ az } x = -4 \text{ nem megoldás.}$$



2. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x) = 2^{x+3} - 7$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben, mivel a 2^x szigorúan monoton növekvő:

$$\begin{aligned}2^{x_1+3} - 7 &= 2^{x_2+3} - 7 \\ 2^{x_1+3} &= 2^{x_2+3} \\ x_1 + 3 &= x_2 + 3 \\ x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x .

$$\begin{aligned}2^{x+3} - 7 &= y \\ 2^{x+3} &= y + 7 \\ x + 3 &= \log_2(y + 7) \quad \text{ha } y + 7 > 0. \\ x &= \log_2(y + 7) - 3, \quad \text{ha } y > -7.\end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \log_2(x + 7) - 3$, $x \in (-7, \infty)$.

3. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel gyöktényezős alakban!

$$x^4 - x^3 - 18x^2 - 13x + 15$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 15 osztói lehetnek.

$$(-3)^4 - (-3)^3 - 18(-3)^2 - 13(-3) + 15 = 0, \quad \text{tehát az } x_1 = -3 \text{ gyök.}$$

$$\text{továbbá } (5)^4 - (5)^3 - 18(5)^2 - 13(5) + 15 = 0, \quad \text{tehát az } x_2 = 5 \text{ is gyök.}$$

Mivel $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 18x^2 - 13x + 15 : (x^2 - 2x - 15) = (x^2 + x - 1) \\ x^4 - 2x^3 - 15x^2 \\ \hline x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \\ x^3 - 2x^2 - 15x \\ \hline -x^2 + 2x + 15 \\ -x^2 + 2x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Keressük meg a $x^2 + x - 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A gyöktényezős alak

$$(x+3)(x-5) \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

4. Vizsgálja meg a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \frac{n+1}{2n^2-1}$$

Megoldás. A határérték $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2n - \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{\infty-0} = 0.$

Vizsgálva a monotonitást:

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{>}{<} a_{n+1} \\ \frac{n+1}{2n^2-1} &\stackrel{>}{<} \frac{n+2}{2(n+1)^2-1} \\ \frac{n+1}{2n^2-1} &\stackrel{>}{<} \frac{n+2}{2n^2+4n+1} \\ 2n^3+6n^2+5n+1 &\stackrel{>}{<} 2n^3+4n^2-n-2 \\ 2n^2+6n+3 &> 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.} \end{aligned}$$

Felülről korlátos, a legkisebb felső korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = \frac{2}{2-1} = 2.$
Legnagyobb alsó korlátja a határérték, azaz 0.