

A1 MINTA(B) 1. zárthelyi - MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

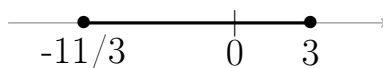
1. Oldja meg $\mathbb{R}$ -en a következő egyenlőtlenséget, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$\left| 1 + \frac{3x - 4}{5} \right| \leq 2$$

Megoldás. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 2, ha a szám -2 és 2 között van:

$$\begin{aligned} -2 &\leq 1 + \frac{3x - 4}{5} \leq 2 \\ -3 &\leq \frac{3x - 4}{5} \leq 1 \\ -15 &\leq 3x - 4 \leq 5 \\ -11 &\leq 3x \leq 9 \\ -11/3 &\leq x \leq 3 \end{aligned}$$

tehát a megoldás: $x \in [-11/3, 3]$.



2. Adja meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\ln(2x - 1)}{\sqrt{3 - x}}.$$

Megoldás. Az $\ln(x)$ függvény a pozitív számokon értelmezett, tehát $2x - 1 > 0$, azaz $x > 1/2$. A gyökjel alá csak nem negatív szám írható, így $3 - x \geq 0$, $3 \geq x$. Továbbá 0-val nem oszthatunk, $3 - x \neq 0$, $x \neq 3$. E három feltételből adódik, hogy $x \in (0.5, 3) = D_f$.

3. Végezze el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$ és $q(x) = x^2 + 1$. Ellenőrizze az osztás helyességét is!

Megoldás.

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - x^2 + 4 : (x^2 + 1) = (x^2 + 2x - 2) \\ \underline{x^4 + x^2 } \\ 2x^3 - 2x^2 + 4 \\ \underline{2x^3 + 2x } \\ - 2x^2 - 2x + 4 \\ \underline{- 2x^2 - 2 } \\ - 2x + 6 \end{array}$$

Azaz

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 2) + (-2x + 6) &= (x^4 + x^2 + 2x^3 + 2x - 2x^2 - 2) + (-2x + 6) = \\ &= (x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2) - 2x + 6 = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4.\end{aligned}$$

4. Számítsa ki a következő sorozat-határértékeket!

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-1} - \sqrt{1+2n} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+2} \right)^{2n}$$

Megoldás.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-1} - \sqrt{1+2n} &= " \infty - \infty " = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{1+2n})(\sqrt{n-1} + \sqrt{1+2n})}{\sqrt{n-1} + \sqrt{1+2n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1 - (1+2n)}{\sqrt{n-1} + \sqrt{1+2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{1+2n}} = \frac{" - \infty "}{\infty} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n} - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n} + 2}} = \frac{-\infty - 0}{\sqrt{1-0} + \sqrt{0+2}} = -\infty\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+2} \right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-5}{n+2} \right)^{n+2} \right)^{\frac{2n}{n+2}} = \\ &= (e^{-5})^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{n}}} = (e^{-5})^{\frac{2}{1+0}} = (e^{-5})^2 = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}},\end{aligned}$$

vagy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+2} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 - \frac{3}{n} \right)}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 - \frac{3}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \right)^2 = \left(\frac{e^{-3}}{e^2} \right)^2 = (e^{-5})^2 = e^{-10}.$$