

# A1 MINTA(A) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$$

( 5 pont )

**Megoldás.**  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)}$ .

A nevező zérushelyeiben a függvény nem értelmezett:  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$ , ezek a függvény szakadási helyei. Ha  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ugyanígy adódik  $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x+4}{x+1} = 2.$

Tehát a két féloldali határérték létezik, és értékük megegyezik. Így a függvénynek hízagpontja (megszüntethető szakadása) van az  $x = 2$  helyen.

Ha  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-9}{-3 \cdot 0+} = \infty \text{ vagy}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{h=x+1, h \rightarrow 0+} \frac{(h-3)(h+3)}{(h-3)h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h+3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} 1 + \frac{3}{h} = \infty$$

Ugyanígy adódik  $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-9}{-3 \cdot 0-} = -\infty$

Tehát a két féloldali határérték  $\pm\infty$  a szakadás lényeges (másodfajú), a függvénynek pólusa van az  $x = -1$  helyen.

2. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

a)  $\frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$       b)  $\ln(\sin(2x))$

( 5 pont )

**Megoldás.** a)  $\left( \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \right)' =$

$$= \frac{4x \cdot x\sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 - 1) \left( \sqrt{x^2 + 1} + x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{(x\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{4x^2\sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 - 1) \left( \frac{x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{x^4 + x^2} =$$

$$= \frac{4x^2\sqrt{x^2+1} - \left(\frac{4x^4-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^4+x^2} = \frac{(4x^4+4x^2) - (4x^4-1)}{(x^4+x^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{4x^2+1}{(x^4+x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{b)} \quad (\ln(\sin(2x)))' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot (\sin(2x))' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot (2x)' = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = 2\operatorname{ctg}(2x).$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = x \ln(x)$$

( 5 pont )

**Megoldás.**  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

A derivált zérushelye  $\ln(x) + 1 = 0$ , azaz  $\ln(x) = -1$ ,  $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ . Ha  $x < 1/e$ , akkor  $\ln(x) < -1$ , így a derivált negatív, tehát a függvény szig. mon. csökken. Ha  $x > 1/e$ , akkor a derivált pozitív, a függvény szig. mon. növekszik.

| $x$  | $(0, 1/e)$ | $1/e$    | $(1/e, \infty)$ |
|------|------------|----------|-----------------|
| $f'$ | $-$        | $0$      | $+$             |
| $f$  | $\searrow$ | lok.min. | $\nearrow$      |

A lokális minimum értéke  $-\frac{1}{e}$ .

**4.** Van-e az  $f$  függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozza meg az egyenletét!

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

( 5 pont )

**Megoldás.** A függvénynek szakadási helye van az  $x = 1$ -ben

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = \infty,$$

tehát az  $x = 1$  egyenes a függvény függőleges aszimptotája.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a  $\pm\infty$ -ben is vízszintes aszimptotája az  $y = 1$  egyenes.