

A1 MINTA(B) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = (x^3 + 2) \cdot e^{2x}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(0) = (0^3 + 2) \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x} + (x^3 + 2) \cdot e^{2x} \cdot 2 = (2x^3 + 3x^2 + 4) \cdot e^{2x}.$$

$$f'(0) = (2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 4) \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Az érintő egyenlete

$$y = 4(x - 0) + 2 = 4x + 2.$$

2. Ha egy adott termék előállítására x petákat költünk, akkor azt később $10 + 12\sqrt{x}$ petákért tudjuk eladni. Mennyit költsünk az előállításra, hogy a hasznunk a lehető legtöbb legyen termékenként?

(5 pont)

Megoldás. Az egy terméken keletkezett hasznunk

$$h(x) = (10 + 12\sqrt{x}) - x,$$

ahol $x \in (0, \infty)$ lehet. Ekkor keresve a $h(x)$ pozitív számokon vett globális maximumát

$$h'(x) = \frac{12}{2\sqrt{x}} - 1.$$

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyeit $\frac{12}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$, ha $6 = \sqrt{x}$, azaz $x = 36$.

x	$(0, 36)$	36	$(36, \infty)$
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Azaz $x = 36$ -ban globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, értéke itt $10 + 12 \cdot 6 - 36 = 46$. Tehát 36 petákat kell költenünk egy termék előállítására, hogy hasznunk termékenként a maximális 46 peták legyen.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. Azt is állapítsa meg, milyen típusú kritikus határértékről van szó.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - e^{2x}}{x^2}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - e^{2x}}{x^2} &= \frac{1 + 0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^{2x}}{2x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4e^{2x}}{2} = \frac{-4}{2} = -2. \end{aligned}$$

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját

$$f''(x) = (x^3 - 3x^2)'' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6.$$

Ennek zérushelye $6x - 6 = 0$, azaz $x = 1$ -ben van.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl.	$\cup$

Mivel a derivált $x < 1$ -re negatív, így ott konkáv a függvénygrafikon. $x > 1$ esetén a derivált pozitív, így ott konvex a függvény. Az $x = 1$ -ben inflexiós pontja van a függvénynek.