Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

1. előd́ás:
Improprius integrál

Határozott integrál (ismétlés)

Definíció: Adott az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon korlátos f függvény. Ha az $[a, b]$ intervallumon adott bármely felosztást fimomítva – úgy hogy a részintervallumok hossza a 0-hoz tart – a közelítőösszegek határértéke létezik, és minden felosztásra és finomításra azonos, akkor azt mondjuk, hogy f **Riemann-szerint integrálható** $[a, b]$-n. A közös határértéket ilyenkor a függvény $[a, b]$ intervallumon vett határozott integráljának nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

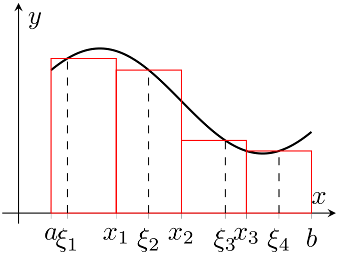
Felosztás: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Közbülső pontok: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

A részintervallumok hossza $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Közelítőösszeg:

$$T_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i.$$



Integrálhatóság

Tétel: Az f függvény pontosan akkor integrálható a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, ha a függvény **korlátos** és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van szakadása).

- **Miért?**

Integrálhatóság

Tétel: Az f függvény pontosan akkor integrálható a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon, ha a függvény **korlátos** és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van szakadása).

- **Miért?**

Tétel: Ha f az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon folytonos, akkor Riemann-szerint integrálható függvény. (Az integrál értéke a függvény "alatti" síkidom területével egyezik meg.)

Szakadási pontoknál szétbontható az integrál (jobb- és baloldali határérték létezik és véges, mivel a függvény korlátos).

Integrálhatóság

Tétel: Az f függvény pontosan akkor integrálható a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, ha a függvény **korlátos** és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van szakadása).

- **Miért?**

Tétel: Ha f az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon folytonos, akkor Riemann-szerint integrálható függvény. (Az integrál értéke a függvény "alatti" síkidom területével egyezik meg.)

Szakadási pontoknál szétbontható az integrál (jobb- és baloldali határérték létezik és véges, mivel a függvény korlátos).

- **Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?**

- **Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?**

- **Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?**

1. típus: Nem korlátos intervallumon integrálunk.

- **Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?**

1. típus: Nem korlátos intervallumon integrálunk.

2. típus: Nem korlátos függvényt integrálunk.

- **Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?**

1. típus: Nem korlátos intervallumon integrálunk.

2. típus: Nem korlátos függvényt integrálunk.

A fenti típusokat összefoglaló nevén **improrius** integráloknak nevezzük.

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Nem korlátos intervallumon integrálunk egy függvényt, azaz $[a, b]$ helyett

$$[\,a, \infty), \quad \text{esetleg} \quad (-\infty, b\,]$$

intervallumok valamelyikén szeretnénk integrálni. (1-es típus)

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Nem korlátos intervallumon integrálunk egy függvényt, azaz $[a, b]$ helyett

$$[\,a, \infty), \quad \text{esetleg} \quad (-\infty, b\,]$$

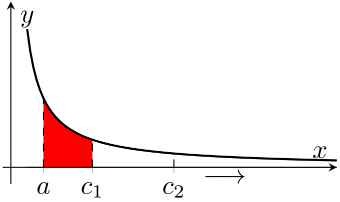
intervallumok valamelyikén szeretnénk integrálni. (1-es típus)

Megoldás: az integrált véges intervallumokon vett integrálok határértékeként defiáljuk:

(a) Ha a felsõ határ végtelen. Legyen f integrálható minden $c > a$ esetén az $[a, c]$-n. Ha a $c \to \infty$ esetén a határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik **(konvergens)**, és

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha a határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál **divergens.**



1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Nem korlátos intervallumon integrálunk egy függvényt, azaz $[a,b]$ helyett

$$[\,a,\infty), \quad \text{esetleg} \quad (-\infty, b\,]$$

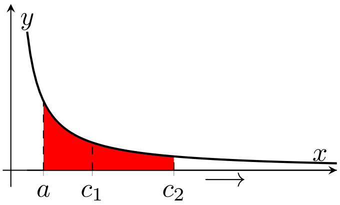
intervallumok valamelyikén szeretnénk integrálni. (1-es típus)

Megoldás: az integrált véges intervallumokon vett integrálok határértékeként defiáljuk:

(a) Ha a felsõ határ végtelen. Legyen f integrálható minden $c > a$ esetén az $[a,c]$-n. Ha a $c \to \infty$ esetén a határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik **(konvergens)**, és

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha a határérték nem létezik,
akkor azt mondjuk, hogy
az improprius integrál **divergens.**



1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Nem korlátos intervallumon integrálunk egy függvényt, azaz $[a, b]$ helyett

$$[\,a, \infty), \quad \text{esetleg} \quad (-\infty, b\,]$$

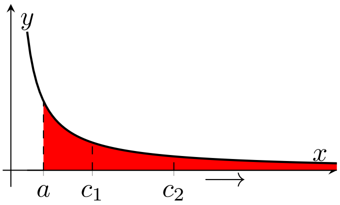
intervallumok valamelyikén szeretnénk integrálni. (1-es típus)

Megoldás: az integrált véges intervallumokon vett integrálok határértékeként defiáljuk:

(a) Ha a felsõ határ végtelen. Legyen f integrálható minden $c > a$ esetén az $[a, c]$-n. Ha a $c \to \infty$ esetén a határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik **(konvergens)**, és

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha a határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál **divergens.**



Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} [\ln x]_1^c =$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\ln x\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\ln x]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Tehát a fenti impropríus integrál nem létezik.

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\ln x\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\ln x]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\ln x\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^c =$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\ln x]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty} 1 - \frac{1}{c} = 1$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\ln x\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln c - 0 = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty} 1 - \frac{1}{c} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$

Példa

3. Számítsuk ki általában az integrál értékét, ha $p \neq 0$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

Példa

3. Számítsuk ki általában az integrál értékét, ha $p \neq 0$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint, ha $p \neq 1$ (abban az esetben már láttuk, hogy divergens az integrál):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^{-p}\,\mathrm{d}x =$$

Példa

3. Számítsuk ki általában az integrál értékét, ha $p \neq 0$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint, ha $p \neq 1$ (abban az esetben már láttuk, hogy divergens az integrál):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^c =$$

$$\lim_{c\to\infty}\frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{1-p}(c^{1-p}-1) = \begin{cases} p > 1 & \dfrac{1}{p-1} \\ p < 1 & \text{divergens} \end{cases}$$

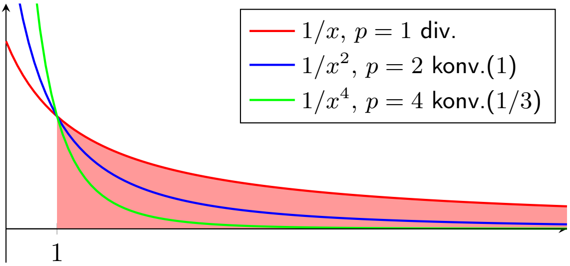
Példa

3. Számítsuk ki általában az integrál értékét, ha $p \neq 0$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint, ha $p \neq 1$ (abban az esetben már láttuk, hogy divergens az integrál):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^c =$$

$$\lim_{c\to\infty}\frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{1-p}(c^{1-p}-1) = \begin{cases} p>1 & \dfrac{1}{p-1} \\ p<1 & \text{divergens} \end{cases}$$



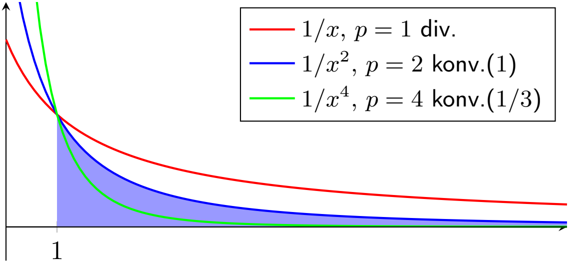
Példa

3. Számítsuk ki általában az integrál értékét, ha $p \neq 0$: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint, ha $p \neq 1$ (abban az esetben már láttuk, hogy divergens az integrál):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^c =$$

$$\lim_{c\to\infty} \frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1-p}(c^{1-p}-1) = \begin{cases} p > 1 & \dfrac{1}{p-1} \\ p < 1 & \text{divergens} \end{cases}$$



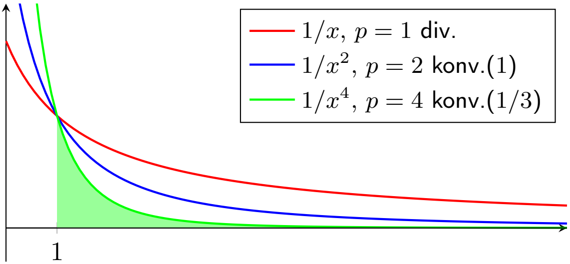
Példa

3. Számítsuk ki általában az integrál értékét, ha $p \neq 0$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

A definíció szerint, ha $p \neq 1$ (abban az esetben már láttuk, hogy divergens az integrál):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^c =$$

$$\lim_{c\to\infty} \frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1-p}(c^{1-p}-1) = \begin{cases} p>1 & \dfrac{1}{p-1} \\ p<1 & \text{divergens} \end{cases}$$



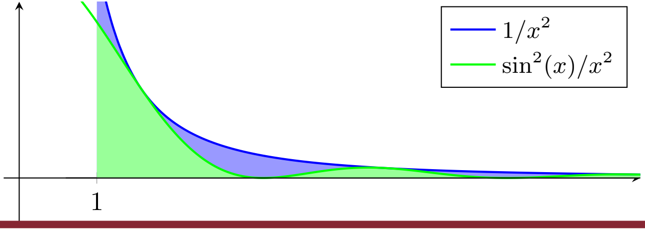
Improprius integrál monotonitása

Ha $0 \le f(x) \le g(x)$ korlátos függvények az $[a, \infty)$ intervallumon és tudjuk, hogy

- $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is az,
- $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ divergens, akkor $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ is az.

Például: $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ esetén tudjuk, hogy $0 \le \sin^2(x) \le 1$ tehát

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$ az integrál konvergens.



1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Hasonlóan:

(b) Ha az alsó határ végtelen. Legyen f integrálható minden $c < b$ esetén az $[c, b]$-n. Ha a $c \to -\infty$ esetén a határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik (konvergens), és

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sőt! Az 1-es típusú integrálokra visszavezethetjük, ha f korlátos a $(-\infty, \infty)$-on, akkor legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{p}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Ebben az esetben az improprius integrál csak akkor konvergens, ha **mindkét** 1-es típsú integrál külön-külön konvergens. Ilyenkor az integrál a két határérték összege lesz.

Példa

4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x$

Példa

4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{c}^{0} = \lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2c}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti impropius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

Példa

4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{c}^{0} = \lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2c}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti impropius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

5. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

Példa

4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_c^0 = \lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2c}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

5. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-xe^{-x}\right]_0^c + \int_0^c e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^c - \frac{c}{e^c} = \lim_{c\to\infty} 1-\frac{c+1}{e^c} = 1-\lim_{c\to\infty}\frac{c+1}{e^c} \overset{L'H}{=} 1-\lim_{c\to\infty}\frac{1}{e^c},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Példa

6. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Példa

6. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Szétvágjuk az intervallumot tetszõlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A + B$$

Példa

6. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Szétvágjuk az intervallumot tetszõlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_c^0 =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \mathrm{arctg}(0) - \mathrm{arctg}(c) =$$

Példa

6. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Szétvágjuk az intervallumot tetszõlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_c^0 =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \mathrm{arctg}(0) - \mathrm{arctg}(c) = \frac{\pi}{2}.$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \mathrm{arctg}(c) - \mathrm{arctg}(0) =$$

Példa

6. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Szétvágjuk az intervallumot tetszõlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_c^0 =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(c) = \frac{\pi}{2}.$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

A függvény párossága miatt, és mert a 0-ban bontottuk fel az integrált, ezért $A = B$.

Példa

6. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Szétvágjuk az intervallumot tetszõlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A + B = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_c^0 =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(c) = \frac{\pi}{2}.$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

A függvény párossága miatt, és mert a 0-ban bontottuk fel az integrált, ezért $A = B$.

Példa – Gauss harang

7. Tudjuk, hogy létezik az integrál értéke, azonban mi nem tujuk kiszámolni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Más módon igazolható, hogy $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.