Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

2. elődás: Improprius integrál 2.

2. típusú improprius integrál – nem korlátos a függvény

Az $[a, b]$ korlátos tartományon integráljuk az $f(x)$ **nem korlátos fgvt.**

Definíció Legyen f integrálható minden $[a + \varepsilon, b]$-n és nem korlátos $[a, b]$-n. Ha $\varepsilon \to 0+$ esetén az integrálok határértéke létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. típusú improprius integrál – nem korlátos a függvény

Az $[a, b]$ korlátos tartományon integráljuk az $f(x)$ **nem korlátos fgvt.**

Definíció Legyen f integrálható minden $[a+\varepsilon, b]$-n és nem korlátos $[a, b]$-n. Ha $\varepsilon \to 0+$ esetén az integrálok határértéke létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és

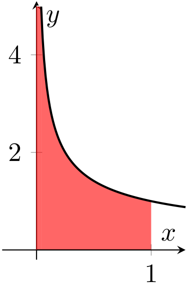
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Például az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény 0-ban a végtelenbe tart, tehát

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+} 2 - 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

A határérték véges, tehát az integrál konvergens.



2. típusú improprius integrál – nem korlátos a függvény

Hasonlóképp, ha $[a, b]$ tartományon az $f(x)$ a b pontban nem korlátos.

Definíció Legyen f integrálható minden $[a, b - \varepsilon]$-n és nem korlátos $[a, b]$-n. Ha $\varepsilon \to 0+$ esetén az integrálok határértéke létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} [\ln x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 - \ln\varepsilon = \infty.$$

Tehát a fenti improprius integrál **divergens**.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

Példa

1. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} [\ln x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 - \ln\varepsilon = \infty.$$

Tehát a fenti improprius integrál **divergens**.

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\varepsilon^1,$$

$p \neq 1$ (abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál), tehát

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-p}\left(1-\varepsilon^{1-p}\right).$$

A fenti határérték csak akkor lesz véges, ha $1-p>0$, azaz $1>p$ ekkor

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}.$$

Példa

3. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Példa

3. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

A törtfüggvény a felsõ határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x =$$

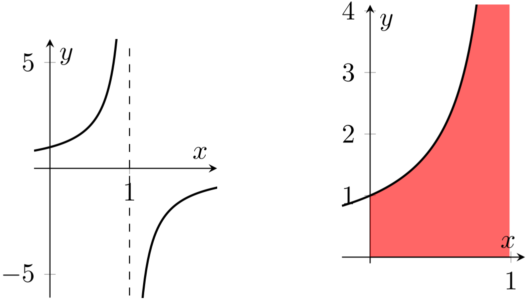
Példa

3. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

A törtfüggvény a felsõ határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} -\ln\varepsilon + 0 = \infty$, az integrál divergens, mert a határérték nem véges.

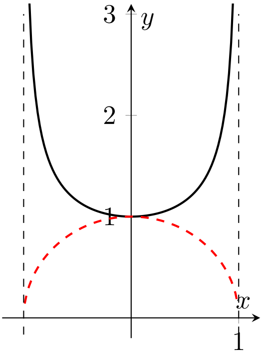


4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Az integrál egyik határán sem korlátos a függvény, szét kell bontanunk:

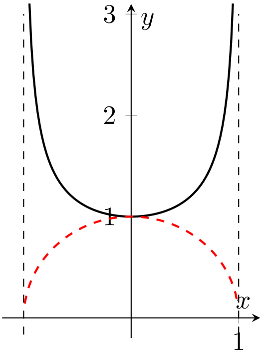
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$



4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Az integrál egyik határán sem korlátos a függvény, szét kell bontanunk:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$



$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} [\arcsin x]_{\varepsilon-1}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(0) - \arcsin(\varepsilon-1) = \frac{\pi}{2}$$

Mivel a függvény páros

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

Így az eredmény: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Ellenpélda

5. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x.$

Ellenpélda

5. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x$.

Egyik határon sem korlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk az integrált:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = A + B$$

$$A = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\ln|\cos(x)|\right]_{\varepsilon-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} -\ln(\cos(0)) + \ln\left(\cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln(1) + \ln\left(\cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 + (-\infty),$$

tehát az összeg egyik tagja nem létezik, így az egész integrál divergens!

Ellenpélda

5. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x.$

Egyik határon sem korlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk az integrált:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = A + B$$

$$A = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\ln|\cos(x)|\right]_{\varepsilon-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} -\ln(\cos(0)) + \ln\left(\cos\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln(1) + \ln\left(\cos\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 + (-\infty),$$

tehát az összeg egyik tagja nem létezik, így az egész integrál divergens!

DE HA így írnánk fel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[-\ln(\cos(x))\right]_{\varepsilon-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) + \ln\left(\cos\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 = 0?!$$

páratlan fgv. az origóra szimmetrikus, ezért integrálja 0. Ezt NEM szabad!