Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

3. előádás:
A komplex számok.
Műveletek algebrai-, illetve trigonometrikus alakban.

Bevezetés

A másodfokú egyenletetnek a valós számok körében csak akkor van gyöke, ha a ***diszkrimináns*** $b^2 - 4ac$ *a megoldóképletben nem negatív.*

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$

Bevezetés

A másodfokú egyenletetnek a valós számok körében csak akkor van gyöke, ha a ***diszkrimináns*** $b^2 - 4ac$ *a megoldóképletben nem negatív.*

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$
- Egész számok $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$
  Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve, de az osztás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot\}$

Bevezetés

A másodfokú egyenletetnek a valós számok körében csak akkor van gyöke, ha a ***diszkrimináns*** $b^2 - 4ac$ *a megoldóképletben nem negatív.*

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$
- Egész számok $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$
  Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve, de az osztás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot\}$
- Racionális számok $= \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
  A racionális számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra nézve, de a gyökvonás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot, \div\}$

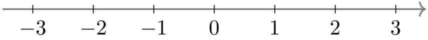
Bevezetés

A másodfokú egyenletetnek a valós számok körében csak akkor van gyöke, ha a ***diszkrimináns*** $b^2 - 4ac$ *a megoldóképletben nem negatív.*

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$
- Egész számok $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$
  Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve, de az osztás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot\}$
- Racionális számok $= \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
  A racionális számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra nézve, de a gyökvonás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot, \div\}$
- Valós számok $(\mathbb{R})$
  A valós számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra, osztásra és nemnegatív számokra a gyökvonásra nézve is, de negatív számokból vont gyök művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot, \div, \sqrt{0+}\}$

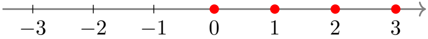
Számhalmazok ábrázolása

Ábrázoljuk az ismert számhalmazokat a számegyenesen!



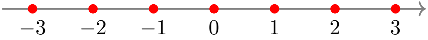
Számhalmazok ábrázolása

Természetes számok ($\mathbb{N}$)



Számhalmazok ábrázolása

Egészek ($\mathbb{Z}$)



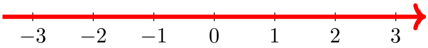
Számhalmazok ábrázolása

Racionális számok ()

A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen.

Számhalmazok ábrázolása

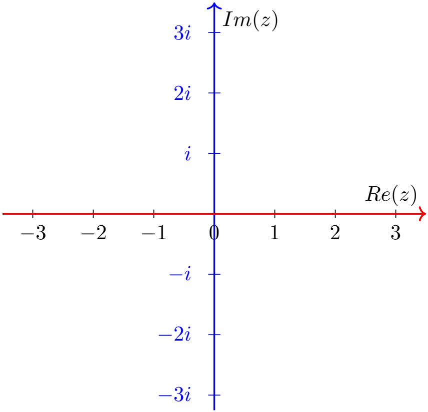
Valós számok ($\mathbb{R}$)



A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen.

A valós számok lefedik a teljes számegyenest.

Komplex számok ($\mathbb{C}$)



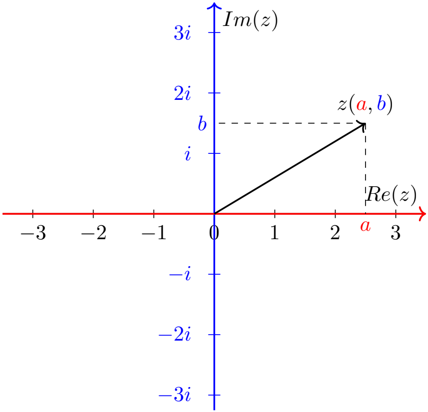
A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen.

A valós számok lefedik a teljes számegyenest.

A negatív számok gyökeinek ábrázolásához **új irányba kell bővítenünk**. Kell egy másik tengely (**képzetes tengely:** Im) és azon egy új egység, legyen ez i, melyet **képzetes egységnek** nevezünk és definíció szerint

$$i^2 := -1.$$

Komplex számok ($\mathbb{C}$)



A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen.

A valós számok lefedik a teljes számegyenest.

A negatív számok gyökeinek ábrázolásához **új irányba kell bővítenünk**. Kell egy másik tengely (**képzetes tengely:** Im) és azon egy új egység, legyen ez i, melyet **képzetes egységnek** nevezünk és definíció szerint

$$i^2 := -1.$$

Így létrehoztuk a komplex számok síkját, ahol minden számot egy pont reprezentál **két valós szám** (koordináta) segítségével:

$$(a, b)$$

$\swarrow \qquad \searrow$

valós rész: $Re(z)$ képzetes rész: $Im(z)$

Komplex számok definíciója

Definíció: A komplex számok halmaza ($\mathbb{C}$) azon $z = a + bi$ alakú kifejezéseket tartalmazza, ahol a és b valós számok, továbbá i a képzetes egység szimbóluma, melyre $i^2 := -1$ definíció szerint teljesül

$$\mathbb{C} = \left\{ a + b\,i \,|\, a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \right\}.$$

Komplex számok definíciója

Definíció: A komplex számok halmaza ($\mathbb{C}$) azon $z = a + bi$ alakú kifejezéseket tartalmazza, ahol a és b valós számok, továbbá i a képzetes egység szimbóluma, melyre $i^2 := -1$ definíció szerint teljesül

$$\mathbb{C} = \left\{ a + b\,i \,|\, a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \right\}.$$

A komplex számok $z = a + b\,i$ alakját a komplex szám **algebrai alakjának** nevezzük. Az algebrai alakban megjelenő $a = Re(z)$ valós szám a komplex szám **valós része**, még $b = Im(z)$ valós szám a komplex szám **képzetes része**.

Komplex számok definíciója

Definíció: A komplex számok halmaza ($\mathbb{C}$) azon $z = a + bi$ alakú kifejezéseket tartalmazza, ahol a és b valós számok, továbbá i a képzetes egység szimbóluma, melyre $i^2 := -1$ definíció szerint teljesül

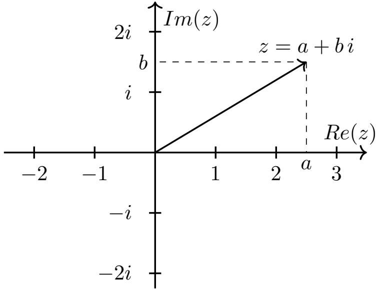
$$\mathbb{C} = \left\{ a + b\,i \,|\, a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \right\}.$$

A komplex számok $z = a + b\,i$ alakját a komplex szám **algebrai alakjának** nevezzük. Az algebrai alakban megjelenő $a = Re(z)$ valós szám a komplex szám **valós része**, még $b = Im(z)$ valós szám a komplex szám **képzetes része**.

A komplex számok halmaza ekvivalens (azaz egyértelműen megfeleltethető) a rendezett valós számpárok halmazával ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

A rendezett valós számpárok halmazát geometriailag megfeleltethetjük a **síkbeli koordinátarendszer helyvektorainak** (pontjainak).

Így a komplex számokat a **komplex számsíkon** szemléltetjük, melynek vízszintes tengelyén a valós, függőleges tengelyén a képzetes rész nagyságát mérjük.



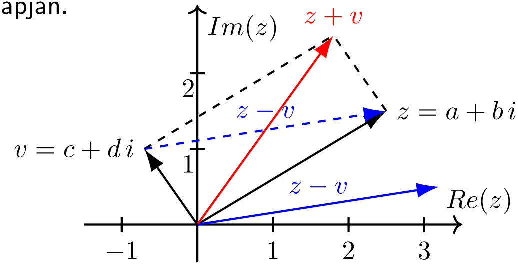
Műveletek komplex számokkal – algebrai alakban

Két komplex szám, $z = a + bi$ és $v = c + di$ akkor **egyenlő**, ha a valós részük és képzetes részük is megegyezik, azaz $Re(z) = a = c = Re(v)$ és $Im(z) = b = d = Im(v)$.

Legyenek adottak $z = a + bi$ és $v = c + di$ komplex számok. Ekkor a komplex számokra a következő **műveleteket** értelmezzük:

- **összeadás**: $z + v := (a + c) + (b + d)i$
- **kivonás**: $z - v = (a - c) + (b - d)i$

Geometriai jelentés: vektorok összeadása/kivonása a paralelogramma-szabály alapján.



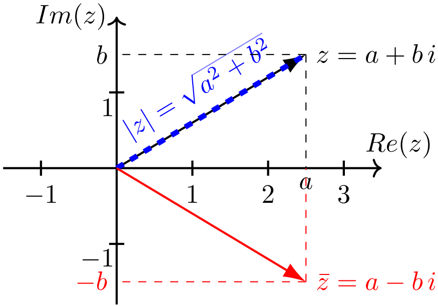
Műveletek komplex számokkal – algebrai alakban

- **konjugálás**: a képzetes rész (-1)-szeresre változik $\bar{z} := a - bi$
- **hossz**: $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$

Geometriai jelentés:

A konjugálás során a vektort tükrözzük a valós tengelyre,

a komplex szám hossza megegyezik az őt reprezentáló vektor hosszával.



Műveletek komplex számokkal – algebrai alakban

- **szorzás**: $z \cdot v := (ac - bd) + (ad + cb)i$, mivel a valós számok szorzási szabálya alapján

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 =$$

$$= ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (ad + cb)i.$$

  Speciális eset, ha

  $$v \cdot \overline{v} = (cc - d(-d)) + (c(-d) + cd)i = c^2 + d^2 = |v|^2$$

  Tehát ha egy komplex számot a konjugáltjával szorzunk, akkor a hossznégyzetét kapjuk, ami nemnegatív valós szám!

- **osztás**: figyelembe véve, hogy $v \cdot \overline{v} = c^2 + d^2$ valós szám, ezért

$$\frac{z}{v} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 + d^2} =$$

$$= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i.$$

Geometriai jelentés: később.

Műveleti tulajdonságok, azonosságok

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ – már láttuk,
- $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2Re(z)$,
- $\overline{z + v} = \bar{z} + \bar{v}$, mivel

$$\overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} =$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di),$$

- $\overline{zv} = \bar{z} \cdot \bar{v}$, mivel

$$\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(bc+ad)i} =$$

$$= (ac-bd)-(bc+ad)i = a(c-di)-b(d+ci) = a(c-di)+bi^2(d+ci) =$$

$$= a(c-di)+bi(di-c) = (a-bi)(c-di),$$ (igaz az osztásra is).

- $\bar{\bar{z}} = z$,
- $|z+v| \leq |z| + |v|$ – háromszögegyenlőtlenség miatt.

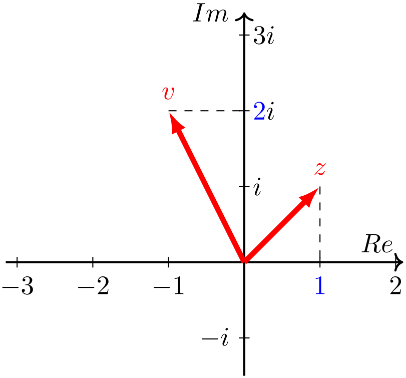
Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

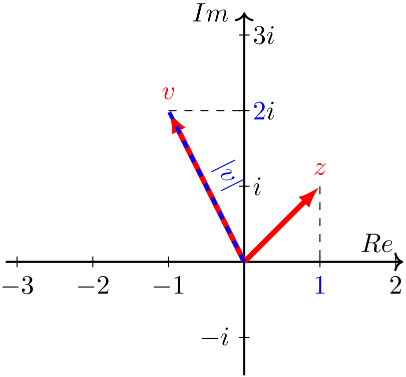
- $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)



Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

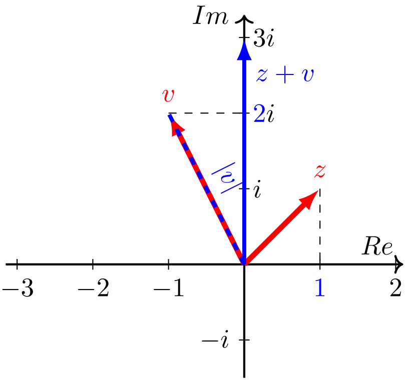
- $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)
- $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

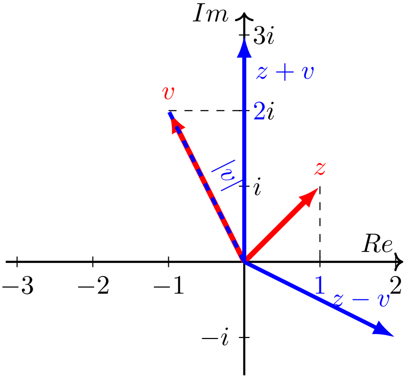
- $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)
- $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $z + v = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$



Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

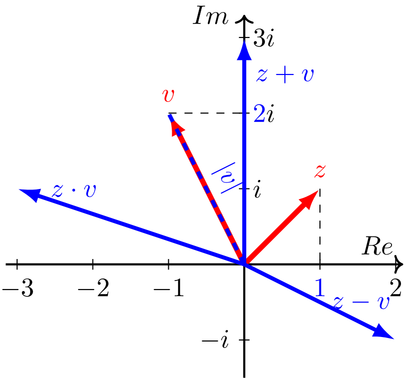
- $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)
- $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $z + v = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z - v = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$



Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

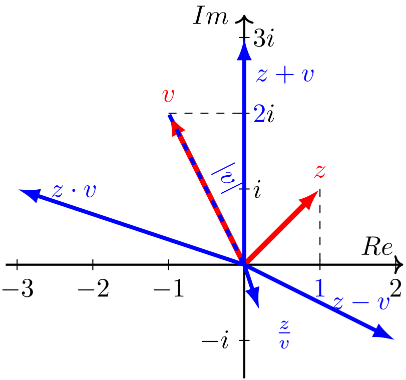
- $\text{Re}(z) = 1$, $\text{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)
- $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $z + v = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z - v = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$
- $z \cdot v = -1 - 2 + (-1 + 2)i = -3 + i$



Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

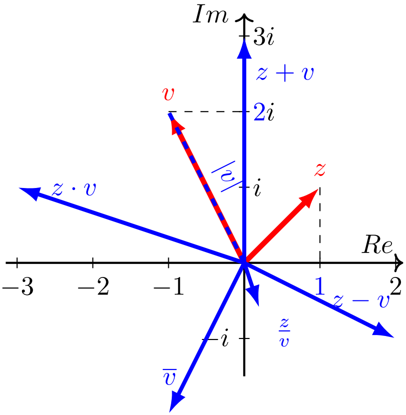
- $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)
- $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $z + v = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z - v = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$
- $z \cdot v = -1 - 2 + (-1 + 2)i = -3 + i$
- $\dfrac{z}{v} = \dfrac{-1 + 2}{5} + \dfrac{-1 - 2}{5}i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$



Példa

Legyen $z = 1 + i$ és $v = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(v)$, $|v|$ kifejezések értéket, továbbá számítsuk ki a $z + v$, $z - v$, $z \cdot v$, $\frac{z}{v}$ és $\overline{v}$ komplex számokat és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

- $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(v) = 2$ (nem $2i$!)
- $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $z + v = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z - v = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$
- $z \cdot v = -1 - 2 + (-1 + 2)i = -3 + i$
- $\dfrac{z}{v} = \dfrac{-1+2}{5} + \dfrac{-1-2}{5} i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5} i$
- $\overline{v} = -1 - 2i$



Hatványozás, gyökvonás

A négy alapművelet elvégezhető algebrai alakban. A szorzás segítségével bevezethetjük a hatványozást:

$$z^n = (a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\dots(a+bi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k i^k$$

Az úgynevezett Binomiális-tétel alapján. A szumma minden páros indexű tagjában az i páros hatványa szerepel, ami ± 1 lesz és minden páratlan indexű tagjában páratlan hatványon, ami $\pm i$ lesz. Így szét lehet válogatni a valós és a képzetes részeket. Például:

$$(2-i)^2 = 4 - 4i + (-i)^2 = 3 - 4i$$

$$(2-i)^3 = 8 - 12i + 6(-i)^2 + (-i)^3 = 2 - 11i$$

Hatványozás, gyökvonás

A négy alapművelet elvégezhető algebrai alakban. A szorzás segítségével bevezethetjük a hatványozást:

$$z^n = (a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\dots(a+bi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k i^k$$

Az úgynevezett Binomiális-tétel alapján. A szumma minden páros indexű tagjában az i páros hatványa szerepel, ami ± 1 lesz és minden páratlan indexű tagjában páratlan hatványon, ami $\pm i$ lesz. Így szét lehet válogatni a valós és a képzetes részeket. Például:

$$(2-i)^2 = 4 - 4i + (-i)^2 = 3 - 4i$$

$$(2-i)^3 = 8 - 12i + 6(-i)^2 + (-i)^3 = 2 - 11i$$

Mi a helyzet a gyökvonással, hogyan keressük meg a $\sqrt{a+bi}$ kifejezés értékét? Algebrai alakban sajnos nincs rá jó módszer!