Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia

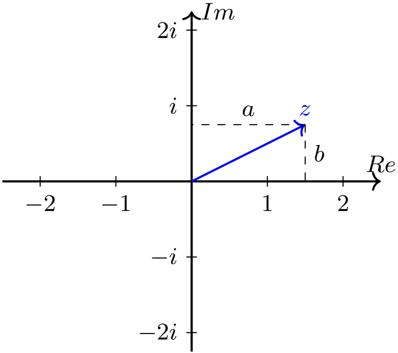
belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

4. előadás:
Komplex gyökvonás.
Az algebra alaptétele.

Trigonometrikus alak

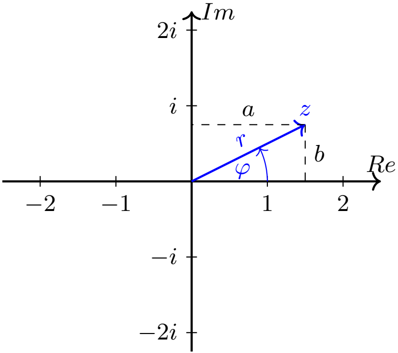
A koordinátasík helyvektorait nem csak a vektor végpontjának koordinátival adhatjuk meg egyértelműen.



Trigonometrikus alak

A koordinátasík helyvektorait nem csak a vektor végpontjának koordinátival adhatjuk meg egyértelműen.

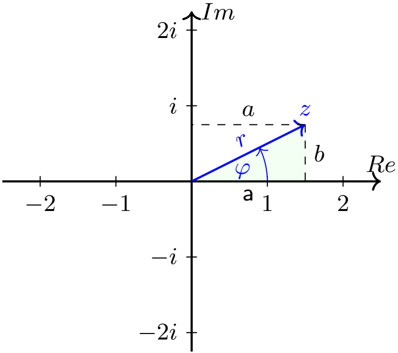
Használhatjuk a **polárkoordinátákat** is, ahol egy helyvektort a hossza (r) és a valós tengely pozitív felével bezárt szög (φ) egyértelműen megad.



Trigonometrikus alak

A koordinátasík helyvektorait nem csak a vektor végpontjának koordinátival adhatjuk meg egyértelműen.

Használhatjuk a **polárkoordinátákat** is, ahol egy helyvektort a hossza (r) és a valós tengely pozitív felével bezárt szög (φ) egyértelműen megad.



$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r\cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r\sin(\varphi)$$

Ekkor $z = a + bi = r\cos(\varphi) + (r\sin(\varphi))i = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.

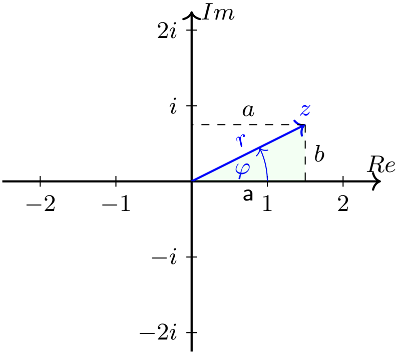
Trigonometrikus alak

A koordinátasík helyvektorait nem csak a vektor végpontjának koordinátival adhatjuk meg egyértelműen.

Használhatjuk a **polárkoordinátákat** is, ahol egy helyvektort a hossza (r) és a valós tengely pozitív felével bezárt szög (φ) egyértelműen megad.

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r\cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r\sin(\varphi)$$



Ekkor $z = a + bi = r\cos(\varphi) + (r\sin(\varphi))i = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.

Definíció: Egy $z \in \mathbb{C}$ szám **trigonometrikus alakja**

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

ahol $r = |z| \geq 0$ a z komplex szám hossza, $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ pedig a komplex számot reprezentáló helyvektor és a valós tengely pozitív fele által bezárt szög (z argumentuma).

Példa

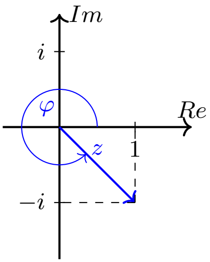
Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = 1 - i$ komplex számot!

Példa

Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = 1 - i$ komplex számot!

A komplex szám hossza:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$



Az argumentumot a helyvektor szögének kiszámításával kell megadnunk! Ezért

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ vagy } \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{5\pi}{4} \text{ vagy } \frac{7\pi}{4}$$

mivel a közös szög a megoldás, ezért

$$\varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Példa

Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = 1 - i$ komplex számot!

A komplex szám hossza:

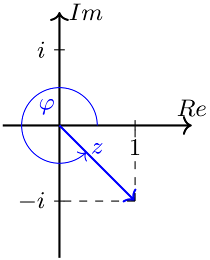
$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Az argumentumot a helyvektor szögének kiszámításával kell megadnunk! VAGY

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{a} = -1,$$

mivel a tg a $[0, 2\pi)$ intervallumon minden értéket kétszer vesz fel (π periodikus), ezért

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ vagy } \frac{7\pi}{4}.$$



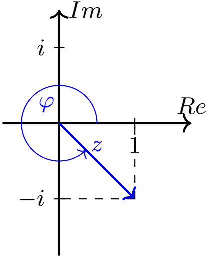
Példa

Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = 1 - i$ komplex számot!

A komplex szám hossza:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Az argumentumot a helyvektor szögének kiszámításával kell megadnunk! VAGY



$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{a} = -1,$$

mivel a tg a $[0, 2\pi)$ intervallumon minden értéket kétszer vesz fel (π periodikus), ezért

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ vagy } \frac{7\pi}{4}.$$

Így $\arg(z) = \varphi = \dfrac{7\pi}{4}$ a komplex szám argumentuma, tehát a szám trigonometrikus alakja

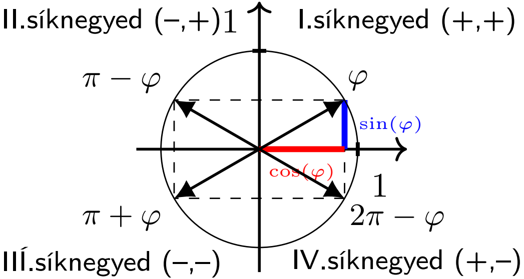
$$z = \sqrt{2}\left(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\right).$$

Ismételjük át a nevezetes szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét!

Nevezetes szögek szögfüggvényei

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Forgó egységvektor:



Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ és $v = q(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$:

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ és $v = q(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$:

- **Összeadást, kivonást** algebrai alakban egyszerűbb.

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ és $v = q(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$:

- **Összeadást, kivonást** algebrai alakban egyszerűbb.
- **Szorzás:**

$$z \cdot v = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot q(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) =$$

$$= rq\Big((\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)) + i(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\psi)\sin(\varphi))\Big) =$$

$$= rq\Big(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\Big).$$

(Felhasználtuk a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákat!)

Tehát két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy szorzunk össze, hogy **hosszakat összeszorozzuk**, az **argumentumokat** pedig **összeadjuk**!

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ és $v = q(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$:

- **Összeadást, kivonást** algebrai alakban egyszerűbb.
- **Szorzás:**

$$z \cdot v = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot q(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) =$$

$$= rq\Big((\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)) + i(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\psi)\sin(\varphi))\Big) =$$

$$= rq\Big(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\Big).$$

(Felhasználtuk a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákat!)

Tehát két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy szorzunk össze, hogy **hosszakat összeszorozzuk**, az **argumentumokat** pedig **összeadjuk**!

- **Hatványozás:** a fentiek alapján kapunk formulát a hatványozásra

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \dots z}_{n} = \underbrace{r \cdot \dots \cdot r}_{n}\Big(\cos(\underbrace{\varphi + \dots + \varphi}_{n}) + i\sin(\underbrace{\varphi + \dots + \varphi}_{n})\Big) =$$

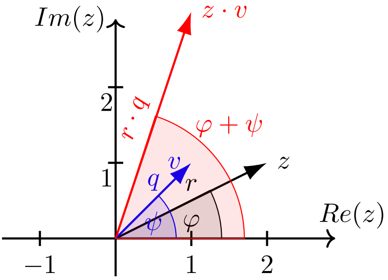
$$= r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

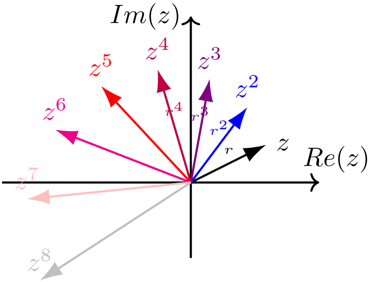
Szorzás geometriai jelentése:
forgatva nyújtás, azaz, ha a

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

számot $v = q(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$-vel szorzom, akkor z hosszát nyújtom (nagyítom, kicsinyítem) v hosszával, és $\arg(z)$-t növelem/csökkentem $\arg(v)$-vel.



Hatványozás geometriai jelentése:
A $z, z^2, \ldots, z^n$ komplex számok egymáshoz képest $|z| = r$ nagysággal nyúlnak és $\arg(z) = \varphi$ szöggel tovább fordulnak, azaz a vektorok csúcsai egy spirálon helyezkednek el (Arkhimédészi-spirál).



Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

- **Osztás:** Felhasználva, hogy $v = q(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$ konjugáltjának trigonometrikus alakja

$$\bar{v} = q(\cos(\psi) - i\sin(\psi)) = q(\cos(2\pi - \psi) + i\sin(2\pi - \psi)).$$

Ekkor

$$\frac{z}{v} = \frac{z \cdot \bar{v}}{|v|^2} = \frac{rq}{q^2}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)) =$$

$$= \frac{r}{q}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)).$$

Tehát két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy osztunk el egymással, hogy a **hosszakat elosztjuk**, az **argumentumokat** pedig **kivonjuk** egymásból!

- **Gyökvonás:** A gyökvonásnál keressünk azokat a v komplex számokat, melyeknek n-edi hatványuk a megadott $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$-vel egyenlő. Ekkor a hatványozás szabálya szerint teljesül, hogy

$$|v|^n = r \quad \text{és} \quad n \cdot \arg(v) = \varphi\,(+2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

innen kapjuk, hogy

$$|v| = \sqrt[n]{r} \quad \text{és} \quad \arg(v) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Tehát a komplex gyökvonás többértékű művelet, egy szám n-edik gyökvonásnál n db különböző megoldást kapunk!

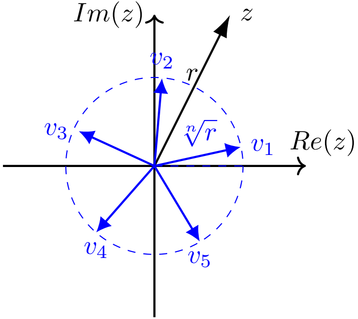
Fontos példa: $\sqrt[n]{1}$, ha a komplex számok körében vagyunk

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k^n = \sqrt[n]{1(\cos(0) + i\sin(0))} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right),$$

$$k = 0, 1 \ldots n-1, \quad n\text{-edik egységgyökök.}$$

Gyökvonás geometriai jelentése:

egy $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ szám n-edik gyökeit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ábrázolva, egy szabályos n-szög csúcsaiba mutató vektorokat kapunk, melynek középpontja az origó, köréírt körének sugara pedig $\sqrt[n]{r}$.



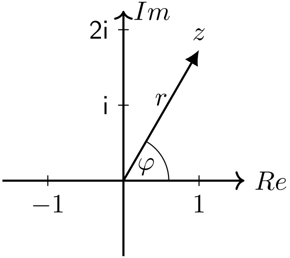
Példa

Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét!

Példa

Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét!

Ábrázoljuk z-t a komplex számsíkon!



Térjünk át trigonometrikus alakra:

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért

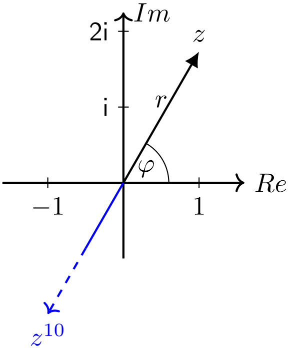
$\varphi = \frac{\pi}{3}$ vagy $60°$,

$z = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

Példa

Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét!

Ábrázoljuk z-t a komplex számsíkon!



Térjünk át trigonometrikus alakra:

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért

$\varphi = \frac{\pi}{3}$ vagy $60°$,

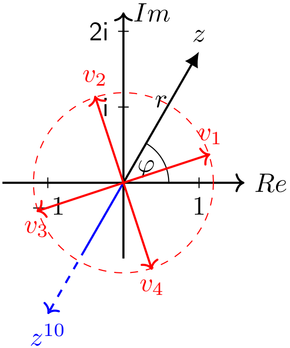
$z = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Példa

Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét!

Ábrázoljuk z-t a komplex számsíkon!



Térjünk át trigonometrikus alakra:

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért

$\varphi = \frac{\pi}{3}$ vagy 60°,

$z = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi/3+k2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3+k2\pi}{4}\right)\right) = \begin{cases} \sqrt[4]{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)), \\ \sqrt[4]{2}(\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12)), \\ \sqrt[4]{2}(\cos(13\pi/12) + i\sin(13\pi/12)), \\ \sqrt[4]{2}(\cos(19\pi/12) + i\sin(19\pi/12)). \end{cases}$$

Az algebra alaptétele

Tétel (Algebra alaptétele) Minden nem 0-adfokú polinomnak **létezik gyöke a komplex számok halmazán**.

Az algebra alaptétele

Tétel (Algebra alaptétele) Minden nem 0-adfokú polinomnak **létezik gyöke a komplex számok halmazán**.

Ez alapján egy n-edfokú $p(z)$ polinomnak van (esetleg) komplex gyöke, z_1. A Bézout-tétel alapján kiemelhető belőle egy $(z - z_1)$ faktor. Ami marad, az egy $(n - 1)$-edfokú polinom. Ezt ismételve kapjuk, hogy **a polinom gyöktényezős felbontása a komplex számok körében n db elsőfokú tag szorzatából áll**. Itt persze lehetnek többszörös gyökök is, ezek alapján átfogalmazhatjuk az algebra alaptételét:

Az algebra alaptétele

Tétel (Algebra alaptétele) Minden nem 0-adfokú polinomnak **létezik gyöke a komplex számok halmazán**.

Ez alapján egy n-edfokú $p(z)$ polinomnak van (esetleg) komplex gyöke, z_1. A Bézout-tétel alapján kiemelhető belőle egy $(z - z_1)$ faktor. Ami marad, az egy $(n - 1)$-edfokú polinom. Ezt ismételve kapjuk, hogy **a polinom gyöktényezős felbontása a komplex számok körében n db elsőfokú tag szorzatából áll**. Itt persze lehetnek többszörös gyökök is, ezek alapján átfogalmazhatjuk az algebra alaptételét:

Tétel (Algebra alaptételének átfogalmazása) Minden $p(z)$ n-edfokú polinomnak multiplicitással számolva n db gyöke van a komplex számok halmazán, ezért felbontható

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + az + a_0 = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}$$

alakra, ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Az algebra alaptételét itt **nem bizonyítjuk**.

Példa

Érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa

Érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa. Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.

Példa

Érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa. Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.

Szokás szerint a konstans tag osztóival próbálkozunk, egész gyököt keresve $(\pm 1, \pm 13)$, mivel az 1 gyök lesz, így z_1=1, kiemelve $(z-1)$-et

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13).$$

A másik két gyök meghatározásához a megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} =$$

Példa

Érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa. Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.

Szokás szerint a konstans tag osztóival próbálkozunk, egész gyököt keresve $(\pm 1, \pm 13)$, mivel az 1 gyök lesz, így z_1=1, kiemelve $(z-1)$-et

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13).$$

A másik két gyök meghatározásához a megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} =$$

Példa

Érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa. Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.

Szokás szerint a konstans tag osztóival próbálkozunk, egész gyököt keresve $(\pm 1, \pm 13)$, mivel az 1 gyök lesz, így z_1=1, kiemelve $(z-1)$-et

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13).$$

A másik két gyök meghatározásához a megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1} =$$

Példa

Érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa. Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.

Szokás szerint a konstans tag osztóival próbálkozunk, egész gyököt keresve $(\pm 1, \pm 13)$, mivel az 1 gyök lesz, így z_1=1, kiemelve $(z-1)$-et

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13).$$

A másik két gyök meghatározásához a megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1} = 3 \pm 2i$$

Tehát $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 3 + 2i$ így $p(z) = (z-1)(z-3+2i)(z-3-2i)$.