Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

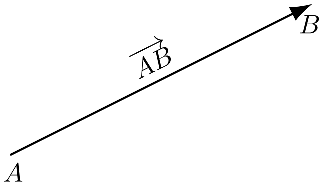
5. előadás: Vektorok – Bevezetés

Vektorok

Definíció [Vektor]: A vektor egy irányított szakasz, melyet egy rendezett pontpár határoz meg. Ezek közül az elsõ a kezdõpont, a második a végpont. Minden vektornak van:

- nagysága
- iránya

Jelölése: $\mathbf{v}, \quad \vec{v}, \quad \underline{v}, \quad \overrightarrow{AB}$.



Két vektort egyenlõnek tekintünk, ha nagyságuk és irányuk megegyezik, azaz eltolással egymásba vihetõek.

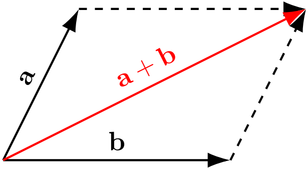
Egy $\mathbf{v}$ **vektor hossza** a kezdõpont és végpont távolsága. Jelölés: $|\,\mathbf{v}\,|$. Ha ez 1, akkor **egységvektor**, ha 0, akkor **nullvektor** (Jel: $\vec{0}$, 0). A nullvektor iránya tetszõleges.

Vektormûveletek – Összeadás, kivonás

Két vektor **egyenlő**, ha hosszuk és irányuk is megegyezik.

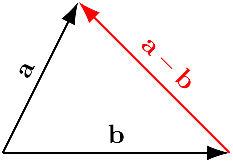
Összeadás: Paralelogramma szabály
Tulajdonságok:

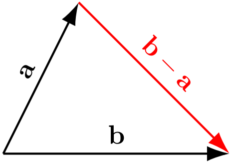
- kommutatív: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
- asszociatív:
  $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$



Egy $\mathbf{v}$ vektor **ellentettvekotra** $-\mathbf{v}$, ha $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$
Kivonás: Paralelogramma szabály
Tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{a}-\mathbf{b}=-(\mathbf{b}-\mathbf{a})$





Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció: Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ is egy vektor, melynek

- nagysága: $|\lambda \cdot \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ – itt az elsõ egy szám abszolút értéke, míg a második egy vektor hossza!
- iránya:
  - $\mathbf{a}$-val megyegyezõ, ha $\lambda > 0$
  - $\mathbf{a}$-val ellentétes, ha $\lambda < 0$
  - nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

- asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
- disztributív: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}$

Adott "$\mathbf{a}$" irányú egységvektor: $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$

Vektor koordináták $\mathbb{R}^3$-ban (Euklideszi-tér)

Vektor megadása koordinátákkal: A térbeli vektorokat a valós számhármasokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a vektor végpontot jelölik. Ezen vektorok kezdõpontja az origó (helyvektorok).

Vektorműveletek kiszámítása koordinátákkal: Legyen $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, ahol $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \\ \bullet\ \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z), \\ \bullet\ \lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \end{array}\right\} \text{koordinátánként végezzük el}$$

- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

A koordináta-tengelyekkel egyirányú egységvektorokat speciálisan az $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ és $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ módon jelöljük.

Példa

Legyen $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $|\mathbf{a}|$, $\lambda\mathbf{a}$, $\mu\mathbf{b}$ és $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ kifejezéseket!

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$$

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$$

$$|\mathbf{a}| = |(3, 2, 1)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

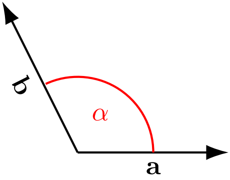
$$\lambda\mathbf{a} = 3(3, 2, 1) = (9, 6, 3)$$

$$\mu\mathbf{b} = -2(1, 0, -2) = (-2, 0, 4)$$

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = 3(3, 2, 1) - 2(1, 0, -2) = (7, 6, 7)$$

Vektorok szöge

Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok **szöge** $\alpha \in [0, \pi]$ az a kisebbik szög, melyet a két vektort közös kezdőpontból felvéve a vektorok közt mérhetünk. Jel: $\alpha = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.



$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

A nullvektor bármely vektorral bármilyen szöget bezárhat.

Két vektor **párhuzamos**, ha $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ vagy π - egyező vagy ellentétes irányításúak.

Két vektor **merőleges(ortogonális)**, ha $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Vektorszorzatok – Skaláris szorzás

Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok **skaláris szorzata** az $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\alpha)$ valós szám, ahol $\alpha = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ a két vektor által bezárt szög.
Jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Geometriai jelentés: Ha két vektor skaláris szorzata pozitív, akkor a vektorok hegyes-, ha negatív akkor tompaszöget zárnak közre.

Tétel: Két nem nulla vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha merõlegesek.
Bizonyítás: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha = 0 \iff$ valamelyik tényezõ 0, de $|\mathbf{a}| \neq 0$ és $|\mathbf{b}| \neq 0$.

Műveleti tulajdonságok:

- kommutatív: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
- lineáris: $\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle$ és $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$
- pozitív definit: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ és 0 ha "$\mathbf{a}$" nullvektor.

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Megjegyzés: Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorok páronként merőlegesek.

Skaláris szorzás alkalmazásai – Szögszámítás

Két vektor szöge kiszámítható:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Példa. Számítsuk ki a t paraméter értékét úgy, hogy az $\mathbf{a} = (1, t, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)$ vektorok szöge $60°$ legyen.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot (-1) + t \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2t.$$

Ugyanakkor:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + t^2 + 1^2} = \sqrt{2 + t^2},$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$

így

$$\cos(\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \cos(60°) = \frac{1}{2} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{2t}{\sqrt{12 + 6t^2}}.$$

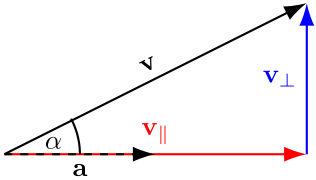
$$\sqrt{12 + 6t^2} = 4t \quad \Rightarrow \quad 12 = 10t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{1.2}(> 0).$$

Skaláris szorzás alkalmazásai – Vektorfelbontás

Vektor felbontása adott iránnyal **párhuzamos és merõleges összetevőkre.** Ha adott egy $\mathbf{v}$ vektor és egy $\mathbf{a}$ "irány", akkor állítsuk elő $\mathbf{v}_\parallel$ és $\mathbf{v}_\perp$ vektorokat úgy, hogy $\mathbf{v}_\parallel$ párhuzamos $\mathbf{a}$-val, $\mathbf{v}_\perp$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$.

Az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_0 = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$.

$\alpha = \measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{a})$.



Ebből megállapítható $\mathbf{v}_\parallel$:

$$\mathbf{v}_\parallel = |\mathbf{v}_\parallel| \cdot \mathbf{a}_0 = \frac{|\mathbf{v}|\cos\alpha}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{v}|\cos\alpha}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_\parallel = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}.$$

Így látható az is, hogy $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}$.

Példa

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3,2,1)$ vektort az $\mathbf{a} = (1,0,-2)$ vektorral párhuzamos és arra merõleges komponensekre!

$$\mathbf{v}_{\|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)}(1,0,-2) = \frac{1}{5}(1,0,-2) =$$

$$= \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right).$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|}) = (3,2,1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5}\right).$$

Ellnõrzés: $\mathbf{v}_{\|} \perp \mathbf{v}_{\perp} \Leftrightarrow \left\langle \mathbf{v}_{\|}, \mathbf{v}_{\perp} \right\rangle = 0$

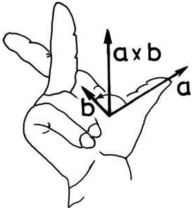
$$\left\langle \mathbf{v}_{\|}, \mathbf{v}_{\perp} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5}\right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0.$$

Vektorszorzatok – Vektoriális (kereszt)szorzat

Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok **vektoriális szorzat**a az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektor, melyre

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$,
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ és $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$,
- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Három vektor jobbrendszert alkot, ha:

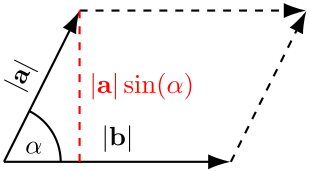


A skaláris szorzással ellentétben itt az eredmény egy VEKTOR!

Megjegyzés: Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, azaz $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

Vektoriális szorzás tulajdonságai

Geometriai jelentés: Két vektor vektoriális szorzatának nagysága megadja a kifeszített paralelogramma területét.



$$T = \text{alap} \cdot \text{magasság} =$$

$$= |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\sin(\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b})) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

Műveleti tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$
- homogén, lineáris : $\begin{cases} \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \end{cases}$

Tétel: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak.

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Legyenek $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Legyenek $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Legyenek $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \ominus\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - b_x a_z)\mathbf{j}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Legyenek $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - b_x a_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} =$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Legyenek $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - b_x a_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (a_x b_z - b_x a_z)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (a_x b_y - b_x a_y)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

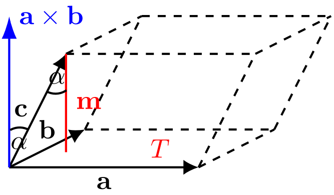
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2\cdot(-2)-0\cdot 1)\mathbf{i}-(3\cdot(-2)-1\cdot 1)\mathbf{j}+(3\cdot 0-2\cdot 1)\mathbf{k} =$$

$$= (-4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektorszorzatok – Vegyes szorzat

Definíció: Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok. Ekkor a három vektor **vegyes szorzat**án az $[\mathbf{abc}] := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (elõbb vektoriális, majd sakláris szorzás) számot értjük.

Geometriai jelentés: Három vektor vegyes szorzata megadja a vektorok által kifeszített paralelepipedon elõjeles térfogatát.



$$V = \text{alap} \cdot \text{magasság} = T \cdot m,$$

$$T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad \text{és} \quad m = |\mathbf{c}| \cos \alpha,$$

$$V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos \alpha = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = [\mathbf{abc}].$$

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem jobbrendszer, akkor $[\mathbf{abc}] < 0$, ezért az $|.|$ használata javasolt:

$$V = \big|[\mathbf{abc}]\big|.$$

Tulajdonságok:

- antikommutatív: $[\mathbf{abc}] = -[\mathbf{acb}]$ és $[\mathbf{abc}] = -[\mathbf{bac}]$
- ciklikus: $[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}]$
- $[\mathbf{abc}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ A három vektor egy síkban van!

Vegyes szorzás koordinátákkal

Legyen $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ és $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ vektorok.

Ekkor az $[\mathbf{abc}]$ vegyes szorzatot az $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle$ alapján kiszámolhatjuk, mint:

$$[\mathbf{abc}] = \left\langle \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right\rangle$$

Ekkor viszont a skaláris és vektoriális szorzás definíciói alapján a_x-el van szorozva minden, ami a vektoriális szorzatban $\mathbf{i}$-vel, a_y-vel, ami $\mathbf{j}$-vel és a_z-al, ami $\mathbf{k}$-val. Ezért akár az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$-t ki is cserélhetjük a_x, a_y, a_z-ra:

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z.$$

(Sarrus-szabály)

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = (1,0,2)$, $\mathbf{B} = (3,1,0)$, $\mathbf{C} = (1,2,4)$ és $\mathbf{D} = (0,3,5)$ pontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

Legyen $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-2)$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (0,2,2)$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD} = (-1,3,3)$. Az $\mathbf{ABCD}$ tetraéder térfogata éppen a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának hatoda.

$$[\mathbf{bcd}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(2\cdot 3 - 3\cdot 2) - 1(0\cdot 3 - 2\cdot(-1)) + (-2)(0\cdot 3 - 2(-1)) =$$

$$= 0 - 2 - 4 = -6.$$

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{V_{\text{paralelepipedon}}}{6} = \frac{|-6|}{6} = 1.$$