Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

6. előadás: Analitikus térgeometria

Egyenesek paraméteres megadása

Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_x, a_y, a_z)$, $B(b_x, b_y, b_z)$, vagy adott egy pontja $A(a_x, a_y, a_z)$ és az irányát megadó vektor $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$.

Az első esetben az irányt megadó vektornak tekinthetjük a $\overrightarrow{AB}$ vektort:

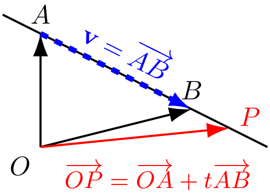
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z).$$

Hogyan lehet az egyenes egy tetszõleges $P(x, y, z)$ pontjának koordinátáit meghatározni?

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \mathbf{v}$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

A P pont koordinátái:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_x + tv_x, \\ y &= a_y + tv_y, \\ z &= a_z + tv_z, \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



ez az egyenes **paraméteres megadása**.

Az egyeneseket kisbetűvel szokás jelölni $(e, f, \ldots)$.

Egyenesek egyenletrendszere

Ha $v_x, v_y, v_z \neq 0$, akkor t kifejezhetõ: $t = \dfrac{x - a_x}{v_x} = \dfrac{y - a_y}{v_y} = \dfrac{z - a_z}{v_z}$,

amibõl az **egyenes egyenletrendszere**:

$$\frac{x - a_x}{v_x} = \frac{y - a_y}{v_y} = \frac{z - a_z}{v_z}, \quad \text{ha } v_x, v_y, v_z \neq 0.$$

Ha $v_x = 0$, akkor P x-koordinátája nem változik, így az egyenest az

$$x = a_x, \quad \text{és} \quad \frac{y - a_y}{v_y} = \frac{z - a_z}{v_z}$$

egyenletek határozzák meg. (Hasonlóan ha v_y vagy v_z nulla.)

Ha $v_x = v_y = 0$, akkor $x = a_x$, $y = a_y$ és z tetszőleges.

Példa

Írjuk fel az $A(1,2,0)$ és $B(2,3,-1)$ pontokon átmenő e egyenes paraméteres alakját és egyenletrendszerét is! Illeszkedik-e az egyenesre $Q(4,5,-1)$?

Példa

Írjuk fel az $A(1,2,0)$ és $B(2,3,-1)$ pontokon átmenő e egyenes paraméteres alakját és egyenletrendszerét is! Illeszkedik-e az egyenesre $Q(4,5,-1)$?
Az irányvektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, -1-0) = (1,1,-1)$.

$$e: \quad \begin{aligned} x &= 1+t, \\ y &= 2+t, \\ z &= -t, \end{aligned} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ illetve } \quad x-1 = y-2 = -z.$$

Példa

Írjuk fel az $A(1,2,0)$ és $B(2,3,-1)$ pontokon átmenő e egyenes paraméteres alakját és egyenletrendszerét is! Illeszkedik-e az egyenesre $Q(4,5,-1)$?
Az irányvektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, -1-0) = (1,1,-1)$.

$$e: \quad \begin{aligned} x &= 1+t, \\ y &= 2+t, \\ z &= -t, \end{aligned} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \text{illetve} \qquad x-1 = y-2 = -z.$$

Q nem illeszkedik, mivel $4-1 = 5-2 \neq -(-1)$ nem teljesül.

Milyen távol van a pont az egyenestől?

Példa

Írjuk fel az $A(1,2,0)$ és $B(2,3,-1)$ pontokon átmenő e egyenes paraméteres alakját és egyenletrendszerét is! Illeszkedik-e az egyenesre $Q(4,5,-1)$?

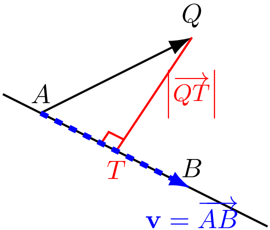
Az irányvektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, -1-0) = (1,1,-1)$.

$$e: \quad \begin{aligned} x &= 1+t, \\ y &= 2+t, \\ z &= -t, \end{aligned} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ illetve } \quad x-1 = y-2 = -z.$$

Q nem illeszkedik, mivel $4-1 = 5-2 \neq -(-1)$ nem teljesül.

Milyen távol van a pont az egyenestől?

$$\left|\overrightarrow{QT}\right| = \left|\overrightarrow{AQ}\right| \cdot \sin(\measuredangle(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AB})) = \frac{\left|\overrightarrow{AQ} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3},$$

$$\left|\overrightarrow{AQ} \times \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8}.$$

($\overrightarrow{AQ}$ vektor $\mathbf{v}$-re vonatkozó merőleges komponensének hossza)

Sík egyenlete

Egy síkot definiálhatunk egy pontja $A = (a_x, a_y, a_z)$ és a sík egyeneseire merőleges irányvektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ segítségével.

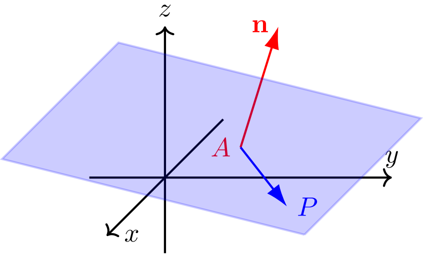
Hogyan számítsuk ki a $P = (x, y, z)$ pontok koordinátái, melyek szintén a síkon fekszenek?

Két vektor pontosan akkor merõleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, így tehát minden pontra teljesülnie kell, hogy

$$\left\langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{n} \right\rangle = n_x(x - a_x) + n_y(y - a_y) + n_z(z - a_z) = 0, \text{azaz}$$

a sík egyenlete:

$n_x x + n_y y + n_z z = n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z.$



Speciálisan, ha a sík átmegy az origón

$$n_x x + n_y y + n_z z = 0$$

Ezzel párhuzamos síkok egyenletei

$n_x x + n_y y + n_z z = c,\ c \in \mathbb{R}$ alakúak.

Az síkokat görög betűvel szokás jelölni $(\Sigma, \Theta, \ldots)$.

Példa

Írjuk fel a $A(2,4,0)$, $B(1,1,1)$ és $C(2,2,-1)$ pontokra illeszkedő Σ sík egyenletét!

Példa

Írjuk fel a $A(2,4,0)$, $B(1,1,1)$ és $C(2,2,-1)$ pontokra illeszkedő Σ sík egyenletét!

A sík normálvektora merőleges a sík összes vektorára:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tehát a sík egyenlete

$$\Sigma: \quad 5x - y + 2z = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 6.$$

Példa

Írjuk fel a $A(2,4,0)$, $B(1,1,1)$ és $C(2,2,-1)$ pontokra illeszkedő Σ sík egyenletét!

A sík normálvektora merőleges a sík összes vektorára:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tehát a sík egyenlete

$$\Sigma : \quad 5x - y + 2z = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 6.$$

Döntsük el, hogy a $Q(1,-1,1)$ pont illeszkedik-e a síkra!

Példa

Írjuk fel a $A(2,4,0)$, $B(1,1,1)$ és $C(2,2,-1)$ pontokra illeszkedő Σ sík egyenletét!

A sík normálvektora merőleges a sík összes vektorára:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tehát a sík egyenlete

$$\Sigma : \quad 5x - y + 2z = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 6.$$

Döntsük el, hogy a $Q(1,-1,1)$ pont illeszkedik-e a síkra!

$$5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 8 \neq 6.$$

Hogyan számolhatnánk ki Q távolságát a Σ síktól?

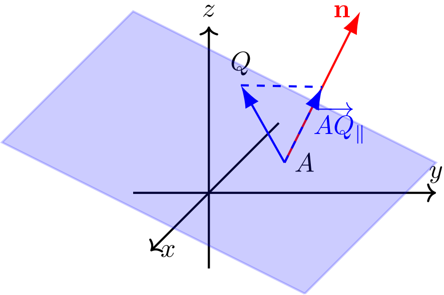
Pont és sík távolsága

Hogyan állapítjuk meg egy pont és egy sík távolságát?

Ha A a sík egy pontja $\mathbf{n}$ a normálvektora és Q egy síkon kívül eső pont, akkor a pont és sík távolsága megegyezik a $\overrightarrow{PQ}$ vektor $\mathbf{n}$-nel párhuzamos komponensének hosszával:

$$d(Q,\Sigma) = |\overrightarrow{AQ}|\cos(\measuredangle(\overrightarrow{AQ},\mathbf{n})) =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{n}|}\left\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AQ} \right\rangle.$$



Ez pontosan akkor nulla, ha Q illeszkedik a síkra.

Az $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ normálvektorú, $A(a_x, a_y, a_z)$ ponton átmenő sík

Hesse-féle normálalakja: $\dfrac{n_x(x-a_x)+n_y(y-a_y)+n_z(z-a_z)}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}} = 0.$

Ha a normálalak bal oldalába egy a síkra nem illeszkedő pont koordinátáit írjuk, akkor pontosan a pont és sík távolságát kapjuk (a 0 helyett).

Példa – folytatás

Ha $\mathbf{n}(5,-1,2)$ a Σ sík normálvektora és $A(2,4,0)$ egy síkbeli pont, akkor $Q(1,-1,1)$ pont távolsága a síktól

$$d(Q,\Sigma) = \frac{n_x(x-a_x)+n_y(y-a_y)+n_z(z-a_z)}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}} =$$

$$= \frac{5(x-2)+(-1)(y-4)+2(z-0)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{5x-y+2z-6}{\sqrt{30}} = \frac{8-6}{\sqrt{30}} = \frac{2}{\sqrt{30}}.$$

Gondoljuk meg, hogy ez a távolság mikor pozitív, és mit jelez az előjel!

Konstrukciók – Egyenes és sík döféspontja.

Példa. Adjuk meg az $\alpha: \; 5x - y + 2z = 6$ és az $e: x = \dfrac{y-1}{2} = z - 1$ egyenes közös pontját!

Az egyenes egyenletrendszeréből $x = \dfrac{y-1}{2}$ és $z = \dfrac{y-1}{2} + 1 = \dfrac{y+1}{2}$ adódik, amit α egyenletébe beírva kapjuk, hogy

$$5 \cdot \frac{y-1}{2} - y + 2 \cdot \frac{y+1}{2} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 5y - 3 = 12 \quad \Longrightarrow \quad y = 3.$$

Innen $x = 1$ és $z = 2$ adódik. Tehát a közös pont a $P(1, 3, 2)$ lesz.

Ellenőrzés!

Konstrukciók – Két sík hajlásszöge

Példa. Adjuk meg az $\alpha: \ 2x - 3y = 5$ és $\beta: \ -x + 3y + 2z = 7$ síkok hajlásszögét!

A merõleges szárú szögek tétele miatt két síknak a hajlásszöge megegyezik a rájuk merõleges normálvektorok szögével.

Keressük $\measuredangle(\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta)$-t, ezért a normálvektorokat le kell olvasnunk azokat a síkok egyenleteibõl: $\mathbf{n}_\alpha = (2, -3, 0)$ és $\mathbf{n}_\beta = (-1, 3, 2)$.

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle}{|\mathbf{n}_\alpha||\mathbf{n}_\beta|} = \frac{-2 - 9 + 0}{\sqrt{4 + 9 + 0}\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{-11}{\sqrt{182}} \quad \Longrightarrow$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{182}}\right) = 144,62^\circ$$

Konstrukciók – Két sík metszésvonala

Példa. Adjuk meg az $\alpha: \; x - y + 2z = 2$ és $\beta: \; 2x + y - 3z = 1$ síkok metszésvonalának egyenletét.

A metszésvonalra mindkét sík normálvektorra merõleges lesz, azaz megkapható a normálvektorok vektoriális szorzataként, ahol $\mathbf{n}_\alpha = (1, -1, 2)$ és $\mathbf{n}_\beta = (2, 1, -3)$.

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A metszésvonal minden pontja kielégíti mindkét sík egyenletét. Ez két egyenlet, de három változó van, tehát az egyik változó értékét tetszõlegesen választjuk, mondjuk $z = 0$ feltehetõ.

Ekkor az α egyenletébõl: $x = y + 2$, beírva β egyenletébe: $2(y+2) + y = 1$,

Tehát $P(1, -1, 0)$, így a keresett egyenes egyenlete: $x - 1 = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{3}$.