Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

7. elődás:
Az n-dimenziós valós tér vektorai.
Lineáris függetlenség.
Bázis, altér, dimenzió.

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(3) létezik nullvektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(3) létezik nullvektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(4) létezik ellentett vektor: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(3) létezik nullvektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(4) létezik ellentett vektor: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(5) a skalárral szorzás disztributív az összeadásra:
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V} :\ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R} :\ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V} :\ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} :\ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(3) létezik nullvektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(4) létezik ellentett vektor: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\ \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(5) a skalárral szorzás disztributív az összeadásra:
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in \mathcal{V} :\ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$$

(6) a skalárral szorzás disztributív a szorzásra:
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V} :\ \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{u}$$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(3) létezik nullvektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(4) létezik ellentett vektor: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V}: \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(5) a skalárral szorzás disztributív az összeadásra:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$$

(6) a skalárral szorzás disztributív a szorzásra:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{u}$$

(7) a skalárral szorzás asszociatív: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \ (\lambda\mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mu \cdot \mathbf{v})$

Vektortér

Definíció: Az elemek egy $\mathcal{V}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti **vektortér**nek, vagy **lineáris tér**nek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van az összeadás $(+)$ művelete és a skalárral szorzás $(\cdot)$ művelete az alábbi feltételekkel:

(0) $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

(1) az összeadás kommutatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

(2) az összeadás asszociatív: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(3) létezik nullvektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(4) létezik ellentett vektor: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(5) a skalárral szorzás disztributív az összeadásra:
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$$

(6) a skalárral szorzás disztributív a szorzásra:
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}: \ \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{u}$$

(7) a skalárral szorzás asszociatív: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \ (\lambda\mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mu \cdot \mathbf{v})$

(8) létezik egység: van olyan $1 \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \ 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Ezek a vektortér **axiómák**.

Rendezett szám n-esek

Az $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ matematikai struktúrát a **rendezett szám n-esek vektorterének** nevezzük, erre $n = 1, 2, \dots$ esetén a fenti tulajdonságok teljesülnek.

A vektortér elemei rendezett szám n-esek, azaz az n-dimenziós vektorok,

$$\text{lehetnek sorvektorok: } (v_1,\, v_2,\, \dots,\, v_n), \text{ vagy oszlopvektorok: } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

ahol $v_i \in \mathbb{R}$ elemek a vektor **koordinátái**. A vektorok között definiált az összeadás és a számmal való szorzás. Mindkét műveletet a 3-dimenziós vektorokkal egyezően elemenként(koordinátánként) definiáljuk,

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \lambda \mathbf{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}.$$

Két vektort **egyenlőnek** tekintünk, ha koordinátánként megegyeznek,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots n, v_i = u_i.$$

Példák (még) vektorterekre

1. Vektorok $1, 2, 3, \dots n$ dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{E}^n$)

Példák (még) vektorterekre

1. Vektorok $1, 2, 3, \ldots n$ dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{E}^n$)

2. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere $(\mathbb{P}^n)$

Példák (még) vektorterekre

1. Vektorok $1,\ 2,\ 3,\ \ldots n$ dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{E}^n$)

2. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere $(\mathbb{P}^n)$

3. Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvények ($\mathrm{C}^0_{[a,b]}$).

Példák (még) vektorterekre

1. Vektorok $1, 2, 3, \ldots n$ dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{E}^n$)
2. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere $(\mathbb{P}^n)$
3. Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvények $(\mathrm{C}^0_{[a,b]})$.

Tehát a vektortér egy sokkal tágabb fogalom, nem csak a vektorokra igazak ezek a tulajdonságok. Így minden, amit a vektorterekről meg tudunk állapítani, az az összes ilyen struktúrán alkalmazható.

Megjegyzés: Egy vektortérben a nullelem és az ellentett elem mindig egyértelmű!

Kombináció, lineáris függetlenség, összefüggőség

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineáris kombinációj**án a tetszőleges valós $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ számok segítségével képzett

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k$$

összeget értjük.

Kombináció, lineáris függetlenség, összefüggőség

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineáris kombinációjá**n a tetszőleges valós $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ számok segítségével képzett

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k$$

összeget értjük.

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat **lineárisan összefüggő**nek nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ nem mind nulla valós számok, hogy

$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0),$ azaz a nullvektor.

Kombináció, lineáris függetlenség, összefüggőség

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineáris kombinációján** a tetszőleges valós $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ számok segítségével képzett

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k$$

összeget értjük.

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat **lineárisan összefüggő**nek nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nem mind nulla valós számok, hogy

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0), \qquad \text{azaz a nullvektor.}$$

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat **lineárisan független**nek nevezzük, ha a bármely $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valós számokkal vett lineáris kombinációjuk pontosan akkor adja a nullvektort eredményül, ha

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Azaz csak **triviális kombináció** $0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ esetén lesz az eredmény a nullvektor.

A lineáris összefüggőség/függetlenség átfogalmazása

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan összefüggenenk.	$\Longleftrightarrow$	Legalább az egyik vektor kifejezhető az összes többi lineáris kombinációjaként.
A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek.	$\Longleftrightarrow$	Bármelyik $i \leq k$ darab vektort kiválasztva szintén lineárisan független vektorokat kapunk.

Példák

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{v}(1,2)$ és $\mathbf{w}(0,-1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert a

$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda-\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

csak úgy teljesülhet, ha $\lambda = 0$ az első koordináták egyelősége miatt, és $2\lambda - \mu = 0$ szintén, de mivel már tudjuk, hogy $\lambda = 0$, ezért $2\cdot 0 - \mu = 0$, azaz $\mu = 0$ is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ lineárisan függetlenek.

Példák

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{v}(1,2)$ és $\mathbf{w}(0,-1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert a

$$\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda-\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

csak úgy teljesülhet, ha $\lambda=0$ az első koordináták egyelősége miatt, és $2\lambda-\mu=0$ szintén, de mivel már tudjuk, hogy $\lambda=0$, ezért $2\cdot 0-\mu=0$, azaz $\mu=0$ is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ lineárisan függetlenek.

2. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortér három elemét, a $\mathbf{v}_1(1,0,0)$, a $\mathbf{v}_2(0,0,1)$ és a $\mathbf{v}_3(3,0,-2)$ vektorokat. Ezek lineárisan összefüggő vektorok, mert

$$3\cdot\mathbf{v_1}-2\cdot\mathbf{v_2}=\mathbf{v_3}.$$

Így találtunk egy olyan kombinációt, melyben **nem minden együttható nulla** (nem triviális), mégis előállítja a nullvektort:

$$3\cdot\mathbf{v_1}-2\cdot\mathbf{v_2}-\mathbf{v_3}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

Dimenzió, bázis

Definíció: Egy vektorteret ***n*-dimenzió**snak nevezzük, ha létezik n darab lineárisan független vektora, de bármely további vektort hozzájuk véve a vektortérből már lineárisan összefüggő vektorrendszert kapunk.

A vektortér **dimenzió**ja tehát, a kiválasztható legnagyobb lineárisan független vektorhalmaz elemszáma.

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér dimenziójának száma pontosan n.

Definíció: Egy n-dimenziós vektortér n darab lineárisan független vektora **bázisa** lesz a vektortérnek.

Megjegyzés. Egy vektortérnek több bázisa is van! A **természetes bázis** elemei az $\mathbf{e_i} = (0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-edik}}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots n$ egységvektorok.

Tétel: Ha $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor **egyértelműen** felírható $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$ alakban, ahol a $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ együtthatókat a $\mathbf{v}$ vektor $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n\}$ bázishoz tartozó **koordinátá**inak nevezzük.

Előző példában

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{v}(1,2)$ és $\mathbf{w}(0,-1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független(előbb láttuk), továbbá bázis is, hiszen $\mathbb{R}^2$ dimenziója kettő.

Írjuk fel a koordinátáit az $\mathbf{a} = (2,3)$ vektornak a $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ bázisra nézve!

$$\lambda_1\mathbf{v}+\lambda_2\mathbf{w} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\2\lambda_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\2\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \mathbf{a},$$

csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = 2$ az első koordináták egyelősége miatt, és $2\lambda_1-\lambda_2 = 3$ szintén, de mivel már tudjuk, hogy $\lambda_1 = 2$, ezért $2\cdot 2-\lambda_2 = 3$, azaz $\lambda_2 = 1$ kell legyen.

Tehát az $\mathbf{a} = (2,3)$ vektor $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ bázisban vett koordinátái $(2,1)$ ebben a sorrendben!

Előző példában

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{v}(1,2)$ és $\mathbf{w}(0,-1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független(előbb láttuk), továbbá bázis is, hiszen $\mathbb{R}^2$ dimenziója kettő.

Írjuk fel a koordinátáit az $\mathbf{a} = (2,3)$ vektornak a $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ bázisra nézve!

$$\lambda_1 \mathbf{v} + \lambda_2 \mathbf{w} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{a},$$

csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = 2$ az első koordináták egyelősége miatt, és $2\lambda_1 - \lambda_2 = 3$ szintén, de mivel már tudjuk, hogy $\lambda_1 = 2$, ezért $2 \cdot 2 - \lambda_2 = 3$, azaz $\lambda_2 = 1$ kell legyen.

Tehát az $\mathbf{a} = (2,3)$ vektor $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ bázisban vett koordinátái $(2,1)$ ebben a sorrendben!

Megjegyzés. Láthatjuk, hogy a szokásos vektorkoordináták a természetes bázisra vonatkoznak

$$\mathbf{a} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Természetes Bázis

Tétel: Az $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i\text{-edik}}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \ldots n$ egységvektorok valóban bázisát alkotják az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek.

Bizonyítás. Mivel n darab vektorról van szó, ezért csak azt kell belátnunk, hogy az $\mathbf{e_i}$, $i = 1, \ldots, n$ vektorok lineárisan függetlenek. Indirekt tegyük fel, hogy a vektorok lineárisan összefüggőek, azaz van egy nem triviáls lineáris kombinációjuk, melyre

$$\lambda_1 \mathbf{e_1} + \lambda_2 \mathbf{e_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{e_n} = \mathbf{0},$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, azaz a lineáris kombináció mégis a triviális volt, ez ellentmondás.

Koordináták egyértelműsége

Tétel: Ha $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor **egyértelműen** felírható $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n$ alakban, ahol a $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$–et a $\mathbf{v}$ vektor $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots \mathbf{b}_n\}$ bázishoz tartozó **koordinátá**inak nevezzük.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektornak kétféle felírása is van a bázisban, azaz létezik

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \mu_n \mathbf{b}_n,$$

ahol legalább egy indexre $\lambda_i \neq \mu_i$. A két kombináció különbsége a nullvektort adja, hiszen egyenlőek

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{b}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{b}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy van olyan nem triviális lineáris kombinációja a bázisvektoroknak, amit a nullvektort adja eredményül (hiszen $\lambda_i - \mu_i \neq 0 \; \forall i$).

Tehát a $\mathbf{b_i}$ bázisvektorok nem voltak lineárisan függetlenek, ami ellentmondás.

Altér

Definíció: A $\mathcal{U}$ vektorhalmaz az $\mathbb{R}^n$ vektortérben egy **altér**, ha $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, és teljesül, hogy az összeadás és számmal szorzás művelete nem vezet ki belőle, azaz

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$,
- $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda \mathbf{u} \in \mathcal{U}$.

Az $\mathcal{U}$ **valódi altér**, ha altér és $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$.

Egy altér dimenziója = kiválasztható legnagyobb lineárisan független vektorhalmaz elemszáma, azaz a bázisának elemszáma.

Példák: Az $\mathbb{R}^3$ alterei:

- bármely origón átmenő egyenes (1 dimenziós)
- bármely origón átmenő sík (2 dimenziós)
- teljes $\mathbb{R}^3$ tér (3 dimenziós), de ez nem valódi altér

Generált altér

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok által **generált altér**nek vagy a vektorok **lineáris burkának** nevezzük azt az $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazt (alteret), mely tartalmazza a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok minden lehetséges lineáris kombinációját.

Következmény 1. Minden bázis lineáris burka maga a teljes vektortér.

Következmény 2. Minden lineáris burok tartalmazza a nullvektort.

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer **rangja** az általuk generált altér dimenziója. (Ez nem feltétlen egyezik a megadott vektorok számával.)

Példák

1. Adjuk meg az $(1, 2, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok által generált alteret.

Példák

1. Adjuk meg az $(1,2,0)$ és $(0,0,1)$ vektorok által generált alteret.

Ebben a térben minden vektor felírható

$$\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(0,0,1)=(\lambda_1,2\lambda_1,\lambda_2)$$

alakban. Ez azt jelenti, hogy szabadon választhatjuk az x és z koordinátákat és fenáll még az $y=2x$ összefüggés. Tehát az altér egy sík, melynek egyenlete: $2x-y=0$. Két dimenziós az altér, így a megadott vektorok egy bázisát adják az altérnek (a síkot kifeszítő két vektor).

Példák

1. Adjuk meg az $(1,2,0)$ és $(0,0,1)$ vektorok által generált alteret.

Ebben a térben minden vektor felírható

$$\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(0,0,1)=(\lambda_1,2\lambda_1,\lambda_2)$$

alakban. Ez azt jelenti, hogy szabadon választhatjuk az x és z koordinátákat és fenáll még az $y=2x$ összefüggés. Tehát az altér egy sík, melynek egyenlete: $2x-y=0$. Két dimenziós az altér, így a megadott vektorok egy bázisát adják az altérnek (a síkot kifeszítő két vektor).

2. Alteret alkotnak-e azok a vektorok, amiknek 1 az utolsó koordinátája, azaz $(x,y,1)\in\mathbb{R}^3$ alakúak?

Példák

1. Adjuk meg az $(1,2,0)$ és $(0,0,1)$ vektorok által generált alteret.

Ebben a térben minden vektor felírható

$$\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(0,0,1)=(\lambda_1,2\lambda_1,\lambda_2)$$

alakban. Ez azt jelenti, hogy szabadon választhatjuk az x és z koordinátákat és fenáll még az $y=2x$ összefüggés. Tehát az altér egy sík, melynek egyenlete: $2x-y=0$. Két dimenziós az altér, így a megadott vektorok egy bázisát adják az altérnek (a síkot kifeszítő két vektor).

2. Alteret alkotnak-e azok a vektorok, amiknek 1 az utolsó koordinátája, azaz $(x,y,1)\in\mathbb{R}^3$ alakúak?

Nem, mert a számmal való szorzásra nem zárt: $2\cdot(x,y,1)=(2x,2y,2)$, ez a vektor nem eleme a megadott halmaznak. (Ez a $z=1$ sík, nem megy át az origón, ezért nem lesz altér sem.)

Vektorok általánosított skaláris szorzása

Definíció: Az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata** az

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

valós szám, ha $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Itt a kiszámítási mód a definíció, melyre a következő **műveleti tulajdonságok** teljesülnek:

- kommutatív: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- lineáris:

$$\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle \text{ és } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

- pozitív definit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0$
  (és csak akkor 0 ha $\mathbf{v}$ a nullvektor).

Megjegyzés: így definiálható a vektorhossz és szög a magasabb dimenziós vektorokra:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}, \qquad \cos(\measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{u})) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}, \qquad \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$