Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

8. elődás:
Mátrixok. Mátrixműveletek, műveleti tulajdonságok.

Bevezetés

Definíció: Az m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot, melynek minden eleme valós szám, $m \times n$-es valós mátrixnak nevezzük. Jelölése:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Az m-szer n típusú mátrixok tere, az $\mathbb{R}^{m \times n}$ egy vektortér.

Speciális mátrixok:

- ha minden i, j indexre $a_{ij} = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{m \times n}$, **nullmátrix**,
- ha $m = 1$, akkor (n-dimenziós) **sorvektor**ról

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \end{pmatrix},$$

- ha $n = 1$, m-dimenziós **oszlopvektor**ról beszélünk, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$,
- ha $m = n$, akkor **négyzetes a mátrix**.

Speciális négyzetes mátrixok

Ha $m = n$, azaz a mátrix négyzetes, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Speciális négyzetes mátrixok

Ha $m = n$, azaz a mátrix négyzetes, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix **főátlója** az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Speciális négyzetes mátrixok

Ha $m = n$, azaz a mátrix négyzetes, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & \color{red}{a_{1n}} \\ a_{21} & \dots & \color{red}{a_{2n-1}} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix **főátlója** az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.
- Az $\mathbf{A}$ mátrix **mellékátlója** $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots a_{n1}$.

Speciális négyzetes mátrixok

Ha $m = n$, azaz a mátrix négyzetes, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix **főátlója** az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.
- Az $\mathbf{A}$ mátrix **mellékátlója** $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots a_{n1}$.
- **Diagonális** a mátrix, ha $a_{ij} = 0$ minden $i \neq j$ esetén.

Speciális négyzetes mátrixok

Ha $m = n$, azaz a mátrix négyzetes, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix **főátlója** az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.
- Az $\mathbf{A}$ mátrix **mellékátlója** $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots a_{n1}$.
- **Diagonális** a mátrix, ha $a_{ij} = 0$ minden $i \neq j$ esetén.
- Az $n \times n$-es **egységmátrix** olyan diagonális mátrix, melynek átlóelemei 1-gyel egyenlőek. Jelölése: $\mathbf{E_n}$.

Speciális négyzetes mátrixok

Ha $m = n$, azaz a mátrix négyzetes, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix **főátlója** az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.
- Az $\mathbf{A}$ mátrix **mellékátlója** $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots a_{n1}$.
- **Diagonális** a mátrix, ha $a_{ij} = 0$ minden $i \neq j$ esetén.
- Az $n \times n$-es **egységmátrix** olyan diagonális mátrix, melynek átlóelemei 1-gyel egyenlőek. Jelölése: $\mathbf{E_n}$.
- A mátrixot **felső(alsó)háromszög mátrixnak** nevezünk, ha $a_{ij} = 0$ minden $i < j$ $(i > j)$ esetén.

Műveletek mátrixokkal

Egyenlőség: Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok azonos típusúak ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$), akkor egyenlőek, ha elemenként egyenlőek $a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \dots m,\ j = 1, \dots n$.

Számmal való szorzás: Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, akkor a mátrix λ-szorosát kapjuk, ha a mátrix minden elemét megszorozzuk λ-val,

$\lambda \mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$.

Példa:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Összeadás: Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok azonos típusúak ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$), akkor az összegmátrix elemei a megfelelő indexű elemeket összege, azaz

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Különbség: Az összeadáshoz hasonlóan, ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}.$$

Ezek a műveletek vektorokra is ugyanígy működnek.

Műveleti tulajdonságok

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ – kommutatív,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ – asszociatív,
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0_{m\times n}} = \mathbf{A}$ – létezik nullelem, a nullmátrix,
4. $\mathbf{A} + ((-1)\mathbf{A}) = \mathbf{0_{m\times n}}$ – létezik ellentett
5. $\lambda(\mu\mathbf{A}) = \mu(\lambda\mathbf{A})$ – kommutatív,
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ – disztributív,
7. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ – disztributív,
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ – létezik egység.

Azaz az $\mathbb{R}^{m\times n}$-es mátrixok tere egy vektortér az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Transzponálás

Transzponálás: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $m \times n$-es, akkor transzponáltja az az $n \times m$-es mátrix $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, melynek elemei $b_{ij} = a_{ji}$. (Felcseréljük az elemek sor és oszlop indexét.)

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Egy négyzetes mátrix **szimmetrikus**, ha $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$, azaz $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \ldots n$.
- Egy négyzetes mátrix **ferdén szimmetrikus**, ha $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{A}$, azaz $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = 1, \ldots n$, ami azt is jelenti, hogy $a_{ii} = 0$.

Műveleti tulajdonságok

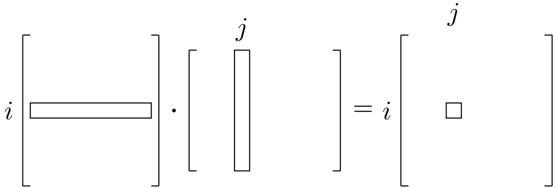
1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
2. $\lambda(\mathbf{A})^T = (\lambda \mathbf{A})^T$,
3. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,
4. ha $\mathbf{A}$ négyzetes, akkor $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ szimmetrikus $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ ferdén szimmetrikus.

Mátrixok szorzása

Két mátrixot, $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t pontosan akkor szorozhatunk össze ebben a sorrendben, ha $\mathbf{A}$ $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ $n \times p$-es. Ekkor a szorzatuk azaz $m \times p$-es $\mathbf{C}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \langle \mathbf{a_i}, \mathbf{b_j} \rangle,$$

ahol $\mathbf{a_i}$ az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorvektora, $\mathbf{b}_j$ pedig a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik oszlopvektora.



Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 25 \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 10 & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 10 & 57 \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcc} & & \begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = & \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 25\\ 10 & 57\\ 16 & \end{pmatrix}\end{array}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 10 & 57 \\ 16 & 89 \end{pmatrix} \end{array}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 25\\ 10 & 57\\ 16 & 89\end{pmatrix}\end{array}$$

DE! $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\end{pmatrix} & \end{array}$$

Példa

Szorozzuk össze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \boxed{2 \times 2} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 10 & 57 \\ 16 & 89 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

DE! $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

$$\begin{matrix} & \boxed{3 \times 2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} & \text{nincs megoldás} \end{matrix}$$

Szorzás műveleti tulajdonságai

1. Nem kommutatív:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

   Lehet, hogy az egyik elvégezhető, de a másik nem, de még ha mindkét szorzás elvégezhető, akkor sem feltétlen kommutatív:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Lineáris: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
3. Homogén: $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$, $\mathbf{A}, \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
4. Asszociatív:
   $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, $\mathbf{A}, \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times r}$,
5. Létezik egység: $\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
6. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, mivel

$$(\mathbf{AB})^T = \left[\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \rangle\right]_{m\times p}^T = \left[\langle \mathbf{b}_j^T, \mathbf{a}_i^T \rangle\right]_{p\times m} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T,$$

   ahol $\mathbf{a_i}$ az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorvektora, $\mathbf{b}_j$ pedig a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik oszlopvektora.

Vektorok szorzása

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két n dimenziós oszlopvektor, akkor a $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ mátrixszorzás eredménye egy 1×1-es mátrix, melynek egyetlen eleme éppen a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzat.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

A $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ mátrixszorzásnak is van értelme, eredménye egy $n \times n$-es mátrix, ezt **diadikus szorzatnak** nevezzük.

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 b_1, a_1 b_2, \ldots \\ a_2 b_1, a_2 b_2, \ldots \\ \ddots \quad a_n b_n \end{pmatrix}.$$