Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

9. elődás:
Négyzetes mátrix determinánsa, inverze.
Mátrixegyenletek.

Négyzetes mátrix determinánsa

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan annyi sora van, mint oszlopa, azaz $m = n$, akkor kiszámíthatjuk a **determinánsát** az alábbi rekurzió szerint

- $n = 1$-re, $\mathbf{A} = (a)$, $\det(\mathbf{A}) = a$,
- $n = 2$-re, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$,
- $n > 2$-re, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbf{A}_{12}) + \ldots + (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) + \ldots,$$

ahol $\mathbf{A}_{1j}$ egy $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrix, melyet úgy kapunk meg $\mathbf{A}$-ból, hogy elhagyjuk az első sorát és a j-edik oszlopát. Ekkor $\det(\mathbf{A}_{1j})$ **aldeterminánsa** $\mathbf{A}$-nak.

Jelölés: $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Példa

Számítsuk ki az alábbi 3×3-as mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \det(\mathbf{A}_{11}) - 2 \cdot \det(\mathbf{A}_{12}) + (-1) \cdot \det(\mathbf{A}_{13}) =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot (-3) - (-1) \cdot 7) - 2 \cdot (0 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2) + (-1) \cdot (0 \cdot 7 - 2 \cdot 5) =$$

$$= -8 - 4 + 10 = -2.$$

(vegyesszorzat kiszámítása)

Determináns teljes kifejtése

Számítsuk ki szimbolikusan egy 3×3-as mátrix determinánsát

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \cdot \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} \cdot \det(\mathbf{A}_{13}) =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} =$$

$$= \sum_{\forall (ijk)} (-1)^{\varepsilon(ijk)} a_{1i}a_{2j}a_{3k},$$

ahol az (ijk) az $1, 2$ és 3 számok egy permutációja (pl.: (132) vagy (213)), és $\varepsilon(ijk)$ az a szám, ahány szomszédos szám felcserélésével az (123) sorrendet újból elérhetjük a permutációban (pl.: $\varepsilon(132) = \varepsilon(213) = 1$).

Determináns teljes kifejtése

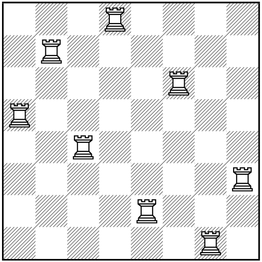
A korábbi definícióval megegyező lenne a determinánst úgy definiálni, hogy ha $(i_1 \dots i_n)$ egy permutációja az $1, 2, \dots n$ indexeknek, és $\varepsilon(i_1 \dots i_n)$ a szükséges cserék száma, hogy az $(123 \dots n)$ sorrendet elérjük (inverziók száma a permutációban), akkor

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)} (-1)^{\varepsilon(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Bástyaelhelyezés:

minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk.

Minden $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ szorzat mátrixelemei pontosan így helyezkednek el a táblázatban.



Aldeterminánsok és kifejtési tétel

Definíció: Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, akkor $\mathbf{A_{ij}}$ jelöli az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixot. Ez az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **minora**. Az ij-edik minor determinánsát **aldeterminánsának** nevezzük: $\det(\mathbf{A_{ij}})$.

Tétel[Determináns kifejtése tetszőleges sor szerint]: Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrix determinánsának a k-adik sor szerinti kifejtése:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}).$$

Példa. Számítsuk ki a korábbi determináns értékét a mátrix második sora szerinti kifejtéssel!

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -(0) \cdot \det(\mathbf{A}_{21}) + (5) \cdot \det(\mathbf{A}_{22}) - (-1) \cdot \det(\mathbf{A}_{23}) =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$$

Következmény: ha a mátrixban található egy csupa nulla sor, akkor a determinánsa nulla lesz.

A determináns tulajdonságai

- A transzponálás nem változtatja meg: $\det(\mathbf{A}^\mathbf{T}) = \det(\mathbf{A})$,
- Determinánsok szorzástétele: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$,

nem bizonyítjuk, de ennek következménye, hogy

- $\det(\mathbf{A}^k) = \det(\mathbf{A})^k$.

Speciális mátrixok determinánsa

Egy négyzetes mátrixot felső háromszögmátrixnak nevezünk, ha a főátlója alatt minden elem 0. A felső háromszögmátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

Ez igaz a diagonális mátrixokra is, speciálisan

$$\det(\mathbf{E}_n) = 1.$$

A determináns kiszámítása sorműveletekkel

A determináns és a sorműveletek:

- A determináns nem változik, ha a mátix egy sorához egy másik sorának valahányszorosát hozzáadjuk.
- A determináns az ellentettjére változik, ha a mátrix két sorát megcseréljük.
- A determináns λ-val szorzódik, ha a mátrix egy sorát λ-val megszorozzuk.

Következmény 1: ha a mátrixban található két egyforma sor, akkor a determinánsa nulla lesz.

Következmény 2: mivel $\det(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}) = \det(\mathbf{A})$, ezért ezek a műveletek ugyanígy hatnak a determinánsra, ha oszlopokon végezzük el őket.

Példa (újra)

Számítsuk ki az alábbi 3×3-as mátrix determinánsát sorműveletekkel!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_3}-2\mathbf{s_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{5}\mathbf{s_2}}{=} 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_3}-3\mathbf{s_2}}{=}$$

$$\overset{\mathbf{s_3}-3\mathbf{s_2}}{=} 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -2.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_1} \leftrightarrow \mathbf{s_3}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\mathbf{s_3}-4\mathbf{s_1} \\ \mathbf{s_4}-3\mathbf{s_1}}}{\overset{\mathbf{s_2}-2\mathbf{s_1}}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_2}/2}{=}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{s_4}+3\mathbf{s_2}}{\overset{\mathbf{s_3}+6\mathbf{s_2}}{=}} (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_3} \leftrightarrow \mathbf{s_4}}{=}$$

$$= (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_4}-3\mathbf{s_3}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-10) = -20$$

Inverzmátrix

Definíció: Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix invertálható, ha létezik olyan, szintén $n \times n$-es típusú, $\mathbf{A^{-1}}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{E_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Az $\mathbf{A^1}$ mátrixot - amennyiben létezik - az $\mathbf{A}$ mátrix **inverzének** nevezzük. Csak négyzetes mátrix esetén vizsgálhatjuk az invertálhatóságot.

Tétel [az inverz mátrix egyértelműsége]: Ha létezik az inverzmátrix, akkor az egyértelmű.

Az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, azaz **reguláris** $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0.$

(Az inverz kiszámítási szabálya alapján látni fogjuk).

Ellenkező esetben, ha a mátrix nem invertálható, akkor **szingulárisnak** nevezzük.

Tulajdonságok

Ha az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n} \times \mathbf{n}}$ mátrixok invertálhatóak, akkor

- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$,
- az inverzmátrix is invertálható, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}^T$ is invertálható, $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})^{\mathbf{T}}$,
- $\mathbf{AB}$ is invertálható, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Inverz mátrix kiszámítása adjungálttal

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \det(\mathbf{A_{11}}) & -\det(\mathbf{A_{12}}) & \dots & (-1)^{1+n}\det(\mathbf{A_{1n}}) \\ -\det(\mathbf{A_{21}}) & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1}\det(\mathbf{A_{n1}}) & \dots & & \det(\mathbf{A_{nn}}) \end{pmatrix}^T}_{\text{adjungált}} =$$

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} \underbrace{\left[(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A_{ji}})\right]^T}_{\text{adjungált}} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}.$$

Az inverzmátrix ij-edik elem a mátrix ji-edik aldeterminánsa a sakktábla-szabály szerint vett előjellel és elosztva a determinánssal. Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor kiszámítható.

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 1(30-30)-2(10-9)+3(20-18) = 0-2+6 = 4.$$

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 1(30-30)-2(10-9)+3(20-18) = 0-2+6 = 4.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 20 & -4 & -4 \\ -12 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 20 & -12 \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1/4 & -1 & 3/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Inverz kiszámítása sorműveletekkel (Gauss-Jordan eljárás)

Egy invertálható mátrixot a korábban a determinánsokon alkalmazott sorműveletekkel mindig átalakíthatunk egy egységmátrixra.

$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{A} & \mathbf{E}_n \\
\hline
\wr & \wr \\
\multicolumn{2}{c}{\text{sorműveletek}} \\
\wr & \wr \\
\mathbf{E}_n & \mathbf{A}^{-1}
\end{array}$$

Ha egy mátrixot sorműveletekkel az egységmátrixra hozunk, és párhuzamosan ugyanezeket a sorműveleteket elvégezzük az egységmátrixon, akkor az átalakítások végén az inverzhez jutunk.

- sorcserék
- sor számmal való szorzása
- egyik sor többszörösének hozzáadása a másikhoz

Példa

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_2-2\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\mathbf{s}_3-3\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\frac{1}{2}\mathbf{s}_2,\frac{1}{2}\mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{\mathbf{s}_1-3\mathbf{s}_3; \\ \mathbf{s}_2+\frac{3}{2}\mathbf{s}_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{-1}{2} & 3 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\mathbf{s}_1-2\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Mátrixegyenletek megoldása

Keressük azt az ismeretlen vektort $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, mely megoldása az egyenletnek $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ahol

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Mátrixegyenletek megoldása

Keressük azt az ismeretlen vektort $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, mely megoldása az egyenletnek $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ahol

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1/4 & -1 & 3/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 11/4 \\ 7/2 \end{pmatrix}.$$