Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

10. elődás:
Lineáris egyenletrendszerek.
Gauss-módszer, megoldhatóság.

Bevezetés – Példa

Keressük meg a valós számok között az egyenleteket egyszerre kielégítő (x, y, z) számhármasokat!

$$x + y + 5z = 3 \tag{1}$$

$$-x + 2y + 4z = 6 \tag{2}$$

$$2x + 3y + 12z = 8 \tag{3}$$

Bevezetés – Példa

Keressük meg a valós számok között az egyenleteket egyszerre kielégítő (x, y, z) számhármasokat!

$$x + y + 5z = 3 \tag{1}$$
$$-x + 2y + 4z = 6 \tag{2}$$
$$2x + 3y + 12z = 8 \tag{3}$$

Korábban algebrai átalakításokkal rendeztük az egyenleteket:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) + (2): & 3y + 9z = 9 \ \xrightarrow[\cdot 1/3]{} & y + 3z = 3 \\ (3) - 2\cdot\ (1): & y + 2z = 2 & \end{array}\right\}\text{különbségük: } z = 1$$

$$\text{Mivel } z = 1 \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} y + 3 = 3 \\ y = 0 \end{array} \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} x + 0 + 5 = 3 \\ x = -2 \end{array}$$

Amit ilyenkor "szabad", azaz nem változtat az egyenletrendszer megoldásán:

- egy egyenletet egy nem nulla valós számmal szorozni,
- az egyenletek sorrendjét változtatni,
- egy egyenlet többszörösét hozzáadni egy másik egyenlethez.

Lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

Ha adott m darab, lineáris (azaz csak elsőfokú tagot tartalmazó) n ismeretlenes egyenlet, akkor ezt az egyenletrendszert felírhatjuk egy mátrixegyenlet formájában.

Általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Mátrixegyenlet-alak:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{azaz}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ez egyenletrendszer **együtthatómátrixa**, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a **változók vektora**, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ az egyenletek jobb oldalán szereplő értékek vektora.

Ha $\mathbf{b} = (0, 0, \ldots, 0)^T$ nullvektor, akkor az egyenletrendszert **homogénnek** nevezzük.

Az egyenletrendszer megoldása – inverzmátrix

Ha az együtthatómátrix négyzetes és invertálható, azaz $m = n$ (annyi egyenlet van ahány ismeretlen), és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

A korábbi példában

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= 3 \\ -x + 2y + 4z &= 6 \\ 2x + 3y + 12z &= 8 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -20/3 & -2/3 & 3 \\ 7/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása – Cramer-szabály

Ha az együtthatómátrix négyzetes és invertálható, azaz $m = n$ (annyi egyenlet van ahány ismeretlen), és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor a változók értéke külön-külön is meghatározható:

$$x_i = \frac{D_i}{\det(\mathbf{A})}, \text{ahol } D_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \forall i = 1, \dots n,$$

itt a D_i determináns annak a mátrixnak a detrminánsa, melyet az $\mathbf{A}$ mátrixból kapunk, ha az i-edik oszlop helyére beírjuk a $\mathbf{b}$ oszlopvektorát.

A Cramer-szabály (is) csak négyzetes, reguláris (azaz nem szinguláris) mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldásakor használható, ilyenkor pontosan egy megoldása van az egyenletrendszernek.

Példa - Cramer-szabály

Oldjuk meg a korábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével is!

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= 3 \\ -x + 2y + 4z &= 6 \\ 2x + 3y + 12z &= 8 \end{aligned} \implies \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (24 - 12) - 1 \cdot (-12 - 8) + 5 \cdot (-3 - 4) = 12 + 20 - 35 = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 12 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3}\Big(3 \cdot 12 - 1 \cdot 40 + 5 \cdot 2\Big) = -\frac{6}{3} = -2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 12 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3}\Big(1 \cdot 40 - 3 \cdot (-20) + 5 \cdot (-20)\Big) = -\frac{0}{3} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3}\Big(1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-20) + 3 \cdot (-7)\Big) = -\frac{(-3)}{3} = 1.$$

Gauss-elimináció – a kibővített mátrix

Ha az egyenletrendszernek nem egyértelmű a megoldása, esetleg nem megoldható, az is kikövetkeztethető az egyenletrendszer mátrixalakjából. Ha

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

akkor az egyenletrendszerhez tartozó **kibővített mátrix**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$$

Vizsgáljuk a kibővített mátrixon az elemi sorműveletek hatását!

Gauss-elimináció – sorműveletek

Az **algebrai átalakítások**, melyek nem változtatják meg az egyenletrendszer megoldását:		**Sorműveletek** a kibővített mátrixon:
egy egyenlettet egy nem nulla valós számmal szorozni,	$\Leftrightarrow$	egy sort egy nem nulla valós számmal beszorozunk,
két egyenletet felcserélünk,	$\Leftrightarrow$	két sort felcserélünk,
egy egyenlet többszörösét hozzáadni egy másik egyenlethez,	$\Leftrightarrow$	egy sor többszörösét hozzáadjuk egy másik sorhoz.

A sorműveletek tehát az egyenletrendszer megoldáshalmazát nem változtatják meg. A **Gauss-elimináció** menete, hogy **lépcsős alakra hozzuk** a kibővített mátrixot, így a hozzá tartozó egyenletek megoldásai megegyeznek az eredeti egyenletrendszer megoldásaival. Majd a lépcsős alakból **kiolvassuk a megoldáshalmazt**.

Példa - Gauss-elimináció

Oldjuk meg a korábbi egyenletrendszert Gauss-elimináció segítségével is!

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_1}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2/3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Példa - Gauss-elimináció

Oldjuk meg a korábbi egyenletrendszert Gauss-elimináció segítségével is!

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_1}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2/3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Ekkor az egyenleteket alulról felfelé kiolvasva

$$\begin{aligned} -z = -1, \quad &\Longrightarrow \quad z = 1, \\ y + 3z = y + 3 \cdot 1 = 3, \quad &\Longrightarrow \quad y = 0, \\ x + y + 5z = x + 0 + 5 \cdot 1 = 3, \quad &\Longrightarrow \quad x = -2, \end{aligned}$$

visszahelyettesítéssel kapjuk a megoldást.

Példa - Gauss-elimináció

Oldjuk meg a korábbi egyenletrendszert Gauss-elimináció segítségével is!

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_1}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2/3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{(-1)\mathbf{s}_3}{\sim}$$

Vagy folytatjuk az eliminációt:

$$\overset{(-1)\mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2-3\mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1-5\mathbf{s}_3}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_1-5\mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}$$

Példa - nem négyzetes együtthatómátrixra

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 7, \\ x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 17x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Példa - nem négyzetes együtthatómátrixra

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 7, \\ x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 17x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Itt az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right)$$

Példa - nem négyzetes együtthatómátrixra

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 7, \\ x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 17x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Itt az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right)$$

Lépcsős alakra hozás:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1 \leftrightarrow \mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2 - 2\mathbf{s}_1}{\sim}}$$

$$\underset{\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2 - 2\mathbf{s}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Az utolsó sor jelentése: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -4$.

Ez soha nem teljesülhet, így nincs megoldás.

Definíció: Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix **sorrangján** a mátrix sorvektorai által kifeszített altér dimenzióját értjük. Azaz ha $\mathbf{A}$ sorrangja k, akkor $\mathbf{A}$ sorvektorai közül kiválasztható k darab lineárisan független, de $k+1$ már nem.

Megjegyzés: Tehát a rang az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lineárisan független sorvektorainak maximális száma, ezért ez kisebb, mint a sorok száma.

Ugyanígy definiálhatjuk egy mátrix **oszloprangját**.

Definíció: Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorrangja és oszloprangja mindig azonos, ezt nevezzük a mátrix rangjának. Ekkor

$$0 \leq \operatorname{rang}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n).$$

Tétel: Az elemi sorműveletek a mátrix rangját nem változtatják meg.

Gauss-elimináció – megoldhatóság és rang

Tétel: A lépcsős alakú mátrixok rangja megegyezik a lépcsők számával.

Előző példában:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Itt a kibővített mátrix rangja $\operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$, de az együtthatómátrixban csak két lépcső van, $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 2 \;\Leftrightarrow\;$ van egy ellentmondásos egyenlet.

Az egyenletrendszernek

- **nem létezik megoldása**, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) < \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$,
- **mindig van megoldása**, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, ezen belül
  - **egyértelmű a megoldás**, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$ változók számáva (annyi egyenlet ahány ismeretlen),
  - **végtelen sok megoldás van**, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$ változók száma, (kevesebb egyenlet, mint ahány ismeretlen: $n - \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ darab ismeretlen szabadon válsztható).

Példa

Keressük a megoldásait!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29, \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33. \end{aligned}$$

Példa

Keressük a megoldásait!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29, \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2-3\mathbf{s}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2/(-7)}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_2/(-7)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3+14\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ekkor végtelen sok megoldás van. Az x_3 változót szabad paraméternek tekintjük, a többi változót ennek függvényében tudjuk megadni (lentről felfelé, visszahelyettesítéssel):

$$\begin{aligned} x_3 &\in \mathbb{R}, \\ x_2 - x_3 = -2 &\quad\Rightarrow\quad x_2 = -2 + x_3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 &\quad\Rightarrow\quad x_1 = 5 - 3(-2 + x_3) + x_3 = 11 - 2x_3. \end{aligned}$$

Példa - Homogén egyenletrendszer

Ilyenkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (azaz minden ismeretlen nulla) mindig megoldás. Mindig teljesül, hogy $\mathrm{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A})$, mivel az utolsó oszlopban csak 0-ák vannak, nem lehet a kibővített mátrixban az elimináció után plusz egy lépcső!

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}+ 3x_4} &= 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ -x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Megoldás biztosan van!

Példa - Homogén egyenletrendszer

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}- x_4} &= 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ -x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_4-\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_3+\mathbf{s}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_2}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_3-2\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_4-\mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Így x_4-et választjuk szabad paraméternek, ekkor a megoldás:

$$\begin{array}{l} x_3 = \frac{5}{4}x_4 \\ x_2 = x_4 - 2x_3 = x_4 - \frac{5}{2}x_4 = -\frac{3}{2}x_4 \\ x_1 = x_3 - 2x_2 = \frac{5}{4}x_4 + 3x_4 = \frac{17}{4}x_4 \end{array} \quad , \text{ ahol } x_4 \in \mathbb{R}.$$

Szöveges feladat

Tudjuk, hogy a konyhánkban két darab csésze tömege megegyezik egy tányér, két bögre és két villa tömegével. Egy darab bögre két villával annyi, mint egy tányér. Egy bögre és egy villa pont négy villa tömegével egyezik meg. Egy tányér 5 dkg híján pont két bögrét tesz ki.
Mennyi a felsorolt dolgok tömege külön-külön?

Szöveges feladat

Tudjuk, hogy a konyhánkban két darab csésze tömege megegyezik egy tányér, két bögre és két villa tömegével. Egy darab bögre két villával annyi, mint egy tányér. Egy bögre és egy villa pont négy villa tömegével egyezik meg. Egy tányér 5 dkg híján pont két bögrét tesz ki.
Mennyi a felsorolt dolgok tömege külön-külön?
Mindent a megfelelő kezdőbetűvel jelölünk és dkg-ban számolunk:

$$\begin{aligned} 2c &= 1t + 2b + 2v \\ 1b + 2v &= 1t \\ 1b + 1v &= 4v \\ 1t + 5 &= 2b \end{aligned}$$

Átrendezve:

$$\begin{aligned} 2c - 1t - 2b - 2v &= 0 \\ 1b + 2v - 1t &= 0 \\ 1b - 3v &= 0 \\ 1t - 2b &= -5 \end{aligned}$$

Szöveges feladat megoldása

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1/2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_4-\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_4+\mathbf{s}_3}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_4+\mathbf{s}_3}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & t & b & v \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \end{array}$$

Így a megoldás: $v = 5$, $b = 3v = 15$, $t = b + 2v = 15 + 10 = 25$ és $c = 1/2t + b + v = 32,5$.

Egy csésze 32,5 dkg, egy tányér 25 dkg, egy bögre 15 dkg, míg egy villa 5 dkg.