Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

11. előadás:
Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai.

Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Definíció. Egy $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ komplex szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix **sajátértéke**, ha létezik legalább egy n-dimenziós vektor, jelölje $\mathbf{s}$ mely nem a nullvektor és teljesül rá, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda\,\mathbf{s}.$$

Minden ilyen vektort, melyre $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, és kielégíti a fenti mátrixegyenletet, azt az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Következmény. A definícióból rögtön következik, hogy ha $\mathbf{s_1}$ és $\mathbf{s_2}$ is sajátvektor egy λ sajátértékhez akkor

- $\mathbf{s_1} + \mathbf{s_2}$ is sajátvektor λ-hoz,
- bármilyen $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ érték esetén $t \cdot \mathbf{s}$ is sajátvektor λ-hoz.

Azaz az egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmazához a nullvektort hozzávéve egy **sajátalteret** kapunk

$$\mathcal{S}_\lambda = \{\mathbf{s} \,|\, \mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda\,\mathbf{s}\}\,.$$

Sajátértékek kiszámítása

Keressük a λ paraméter függvényében a mátrixegyenlet s megoldásvektorait:

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda\,\mathbf{s}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda\,\mathbf{E}_n\,\mathbf{s}, \qquad \text{ahol } \mathbf{E}_n \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ egységmátrix,}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}_n)\,\mathbf{s} = \mathbf{0}, \qquad \text{ahol } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \text{ nullvektor.}$$

A sajátvektorok tehát egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek a homogén egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól eltérő megoldása ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$), ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}_\mathrm{n}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk ennek az egyenletnek, a **karakterisztikus egyenletnek** a gyökeit. Az egyenlet bal oldala λ-nak, mint változónak n-ed fokú polinomja (**karakterisztikus polinom**). A polinom gyökei a mátrix sajátértékei. Ekkor az algebra alaptétele alapján multiplicitással számolva n valós/komplex sajátérték van.

Példa

Keressük meg az alábbi mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Példa

Keressük meg az alábbi mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E_2}) &= 0, \\ \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ (-1-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Mivel $\lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$, ezért a mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -3.$$

Keressük a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

Példa

Ha $\lambda_1 = 3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E_2})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -4x + 4y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

mindkét egyenlet átrendezve $-x = y$. Így a sajátvektorok

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátértékhez tartozó sajátaltér

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}, \text{ 1-dimenziós altér, } \mathbb{R}^2 \text{ egy egyenese.}$$

Példa

Ha $\lambda_2 = -3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{E_2})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2x + 4y \quad = \quad 0,$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = -2y$, ezért a sajátvektorok

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ahol } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátértékhez tartozó sajátaltér

$$\mathcal{S}_{-3} = \left\{ y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}, \text{ 1-dimenziós altér, egyenes } \mathbb{R}^2\text{-ben.}$$

Sajátértékek tulajdonságai

- Sajátértékek lehetnek komplex számok is. Például

$$\det\left(\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}-\lambda & -2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

- Diagonális és háromszögmátrixok sajátérétkei az átlóelemek.
- Ha a $\lambda = 0$ sajátértéke $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor $\det(\mathbf{A}) = 0$, azaz a mátrix szinguláris, mivel $\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E_n}) = 0$.
- Ha az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke $\lambda \neq 0$, akkor az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix sajátértéke $\dfrac{1}{\lambda}$, mivel

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E_n}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{s}.$$

- A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak.

Szimmetrikus mátrix sajátértékei, sajátvektorai

Tétel. Szimmetrikus mátrixok sajátértékeire, sajátvektoraira a következők igazak,

- ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós,
- ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, akkor $\mathbf{A}$-nak van n darab, páronként merőleges sajátvektora. (Főtengelytétel)

Példa. Keressük a szimmetrikus mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left((6-\lambda)^2 - 4\right) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2 - 12\lambda + 32) = -(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-8) = 0.$$

A sajátértékek $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 8$.

Példa - Szimmetrikus mátrixok sajátvektorai

Sajátvektorok $\lambda = -2$ esetén $(\mathbf{A} + 2\,\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} 4x + z &= 0 \\ x + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} x = z = 0 \text{ és } y \in \mathbb{R}.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ha $\lambda = 4$, akkor $(\mathbf{A} - 4\,\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} 2x + 2z &= 0 \\ -6y &= 0 \\ 2x + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} x = -z \text{ és } y = 0.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Példa - Szimmetrikus mátrixok sajátvektorai

Ha $\lambda = 8$, akkor $(\mathbf{A} - 8\,\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} -2x + 2z = 0 \\ -10y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{array}\right\} x = z \text{ és } y = 0.$$

Így a sajátvektorok: $\quad \mathbf{s} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Ekkor a három sajátértékhez tartozó három sajátvektort választva

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

három egymásra páronként merőleges vektor, hiszen skalárszorzatuk nulla.

Ha a szimmetrikus mátrixban nem minden sajátérték különböző, akkor óvatosan kell vektorokat választani, de akkor is tudunk páronként merőleges vektorokat választani!