

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**13. előadás:
Többváltozós függvények definíciója,
folytonossága és határértéke.**

Bevezetés – Többváltozós függvények

- **(Egyváltozós) valós függvények** nevezzük azt az egyértelmű hozzárendelést, melyre

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow R_f \subseteq \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x).$$

- **Kétváltozós valós függvény** az a hozzárendelés, mely az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektorokhoz egy valós számot rendel, azaz

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow R_f \subseteq \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \text{ vagy } z = f(x, y).$$

- Általánosságban egy **többváltozós függvényt** a $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra definiált egyértelmű hozzárendelésnek tekintünk, mely

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow R_f \subseteq \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Példa: Rendeljük hozzá egy 3-dimenziós vektorhoz a hosszát

$$l : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \text{ ahol } (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = l(x, y, z).$$

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvényeket a koordinátásík pontjaihoz hozzárendelnek egy harmadik, valós számot

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) =: z,$$

A leképezés megfelelője a térben az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat. Ezt a függvény **grafikonjának** nevezzük. A grafikont a $z = f(x, y)$ **felületnek** is hívjuk.

A felületről akkor kapunk pontosabb képet, ha megvizsgáljuk a koordináta síkokkal való **metszetgörbét**, valamint a **szintvonalakat**.

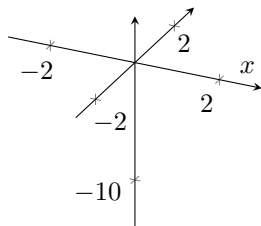
Definíció. (Szintvonal) Az xy -sík azon pontjainak összességét, melyekben az f függvény ugyanazt a c konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, a függvény **szintvonalának** vagy **nívóvonalának** nevezzük.

Definíció. (Kontúrvonal) A $z = f(x, y)$ felület egy c konstans értékhez tartozó szintvonala feletti pontjait, az f függvény c értékhez tartozó **kontúrvonalának** nevezzük. A kontúrvonal megkülönböztetendő a szintvonalától, mert míg az előbbi a felületen helyezkedik el, az utóbbi az xy -síkban van.

Példa

Vizsgáljuk az $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordináta-síkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

$$4 - x^2 - y^2$$

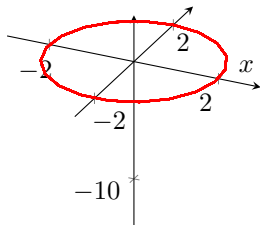


Példa

Vizsgáljuk az $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordináta-síkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x, y) = 0$ kontúrvonal az xy -sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy -síkban.

$$4 - x^2 - y^2$$



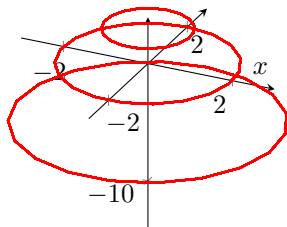
Példa

Vizsgáljuk az $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordináta-síkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x, y) = 0$ kontúrvonal az xy -sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy -síkban.

Hasonlóan az $f(x, y) = 3$ és $f(x, y) = -5$, melyekre $x^2 + y^2 = 1$ ill. 9 , azaz a $z = 3$ síkban a $(0, 0, 3)$ középpontú, 1 sugarú kör, a $z = -5$ síkban a $(0, 0, -5)$ középpontú, 3 sugarú kör.

$$4 - x^2 - y^2$$



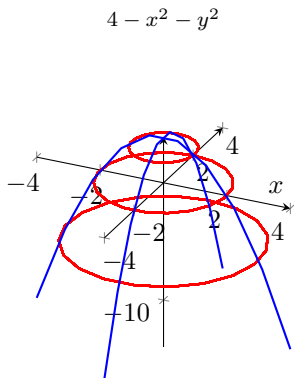
Példa

Vizsgáljuk az $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordináta-síkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x, y) = 0$ kontúrvonal az xy -sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy -síkban.

Hasonlóan az $f(x, y) = 3$ és $f(x, y) = -5$, melyekre $x^2 + y^2 = 1$ ill. 9 , azaz a $z = 3$ síkban a $(0, 0, 3)$ középpontú, 1 sugarú kör, a $z = -5$ síkban a $(0, 0, -5)$ középpontú, 3 sugarú kör.

Az $y = 0$ (xz -sík) és $x = 0$ (yz -sík) síkokkal vett metszégörbék rendre $4 - x^2 = z$ és $4 - y^2 = z$ parabolák, melyek közös csúcspontja a $(0, 0, 4)$ pont.



Példa

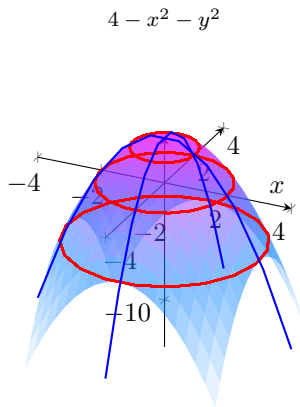
Vizsgáljuk az $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordináta-síkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x, y) = 0$ kontúrvonal az xy -sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy -síkban.

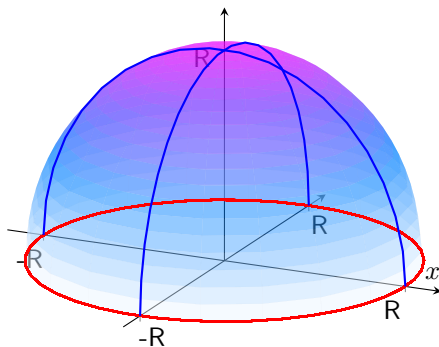
Hasonlóan az $f(x, y) = 3$ és $f(x, y) = -5$, melyekre $x^2 + y^2 = 1$ ill. 9 , azaz a $z = 3$ síkban a $(0, 0, 3)$ középpontú, 1 sugarú kör, a $z = -5$ síkban a $(0, 0, -5)$ középpontú, 3 sugarú kör.

Az $y = 0$ (xz -sík) és $x = 0$ (yz -sík) síkokkal vett metszégörbék rendre $4 - x^2 = z$ és $4 - y^2 = z$ parabolák, melyek közös csúcspontja a $(0, 0, 4)$ pont.

Egy parabola a z -tengely körül forgatva: forgásparaboloid.



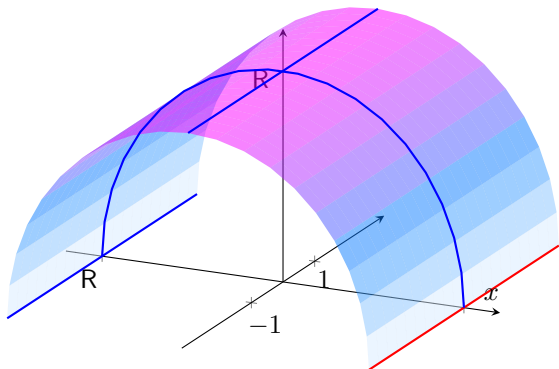
Nevezetes felületek – Gömb



Origó középpontú, R sugarú félgömb.

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

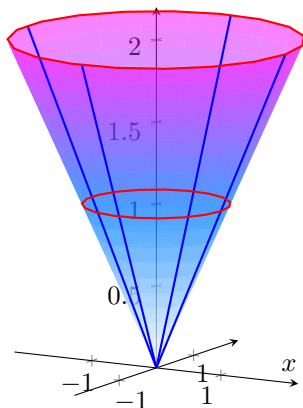
Nevezetes felületek – Hengerfelület



R sugarú henger, melynek forgástengelye az y -tengely.

$$z = \sqrt{R^2 - x^2}$$

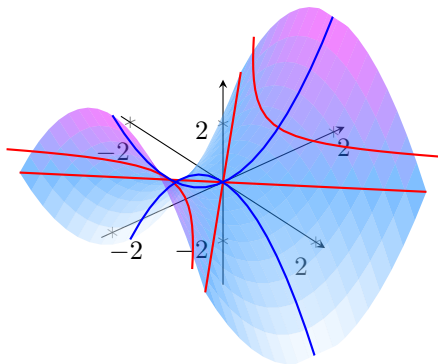
Nevezetes felületek – Forgáskúp



Forgáskúp: ferde egyenes z -tengely körüli forgatása.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nevezetes felületek – Nyeregfelület



Nyeregfelület: hiperbolikus paraboloid.

$$z = y^2 - x^2$$

Függvényhatárérték – Kétváltozós függvények

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény **határértéke az (x_0, y_0) pontban $A \in \mathbb{R}$** , ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, hogy $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = A$.

Megjegyzés. Itt fontos, hogy $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ azt jelenti, hogy mindkét koordinátában tartunk az (x_0, y_0) ponthoz, azaz

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

Definíció. Az f függvény **folytonos az $(x_0, y_0) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ pontban**, ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

A határértéket és a folytonosságot is hasonlóan definiálhatjuk n -változós valós függvények esetében.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2$ határértéket.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2$ határértéket.

Sejthető, hogy a határérték megegyezik a felvett függvényértékkel, azaz $f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ lesz. Ennek igazolására, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor

$$|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon,$$

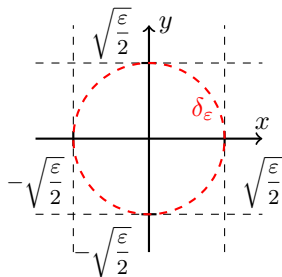
$$|x^2 + y^2 - 0| < |x^2| + |y^2| < \varepsilon$$

így ha teljesül például, hogy

$$|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{és} \quad |y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

tehát egy $(0,0)$ középpontú $2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ oldalhosszúságú négyzetben belül van az $x(x,y)$ pont, akkor teljesül a fenti egyenlőtlenség. Ezért legyen

$$\delta_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$



Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ határértéket.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$

2) Ha $x = 0$, akkor $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$

2) Ha $x = 0$, akkor $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$

3) Ha $y = x$, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$

SŐT! Ha $y = mx$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \neq 0$$

tehát ez a határérték NEM létezik, mert bármilyen $(0,0)$ -hoz közeledés mellett ugyanahhoz az értékhez kellene konvergálnunk.