

# Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

[belus@math.bme.hu](mailto:belus@math.bme.hu)

[geometria.math.bme.hu/bela-szilvia](https://geometria.math.bme.hu/bela-szilvia)

**14. előadás:  
Parciális deriváltak.  
Gradiens, érintő sík.  
Íránymenti deriváltak.**

## Többváltozós függvények parciális deriváltjai

Egy többváltozós, valós értékű függvényt könnyű az egyes változói szerint deriválni. Ilyenkor a többi változót konstansnak tekintjük, csak a szóban forgó változó függvényeként deriváljuk a függvényt.

**Definíció.** Az  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  függvény  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$  helyen  $x_i$  szerint parciálisan deriválható, ha az  $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  egyváltozós függvény deriválható az  $x_i = a_i$  helyen. Jelölés:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \partial_i f(\mathbf{a}).$$

Tehát egy kivételével minden változót konstansnak tekintünk a deriválás szabályaira nézve. Ezt minden változó szerint megtehetjük.

**Példa.** Számítsuk ki az  $f(x, y, z) = x^2 - 3xz + 2y^2z - z^2$  háromváltozós függvény parciális deriváltjait a  $(2, 1, 1)$  pontban:

$$f'_x(x, y, z) = 2x - 3z \quad \Rightarrow \quad f'_x(2, 1, 1) = 4 - 3 = 1$$

$$f'_y(x, y, z) = 4yz \quad \Rightarrow \quad f'_y(2, 1, 1) = 4$$

$$f'_z(x, y, z) = -3x + 2y^2 - 2z \quad \Rightarrow \quad f'_z(2, 1, 1) = -6 + 2 - 2 = -6$$

## Kétváltozós függvények parciális deriváltjai

A hagyományos derivált definíció alapján a kétváltozós függvények parciális deriváltjai egy  $(x_0, y_0)$  pontban a következő határértékekkel egyeznek meg

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

A deriváltak értékei tetszőleges  $(x, y) \in D_f$  pontban megadják a parciális deriváltakat, azaz

$$f'_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f'_x(x, y),$$

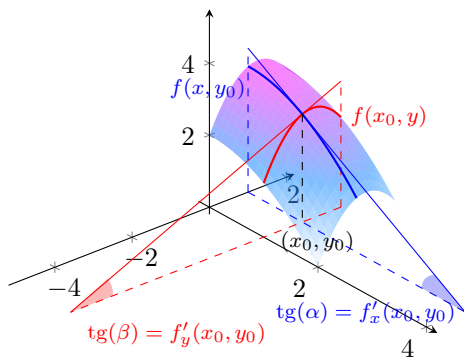
és

$$f'_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f'_y(x, y),$$

függvények általánosan is felírhatóak az  $z = f(x, y)$  felülethez.

## Kétváltozós függvények parciális deriváltjainak geometriai jelentése

Az  $f(x, y)$  függvény  $(x_0, y_0)$  pontbeli  $x$ -szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése nem más, mint a  $z = f(x, y)$  felület és az  $y = y_0$  sík metszégörbéjének érintőmeredeksége a pontban. Hasonlóan értelmezhetjük az  $f(x, y)$  függvény  $(x_0, y_0)$  pontbeli  $y$ -szerinti parciális deriváltját.



## Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  függvénygörbe  $x_0 \in D_f$  pontjához tartozó érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Kétváltozós függvényre az  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  függvénygrafikon (egy felület) adott  $(x_0, y_0) \in D_f$  pontjához tartozó **érintősík** egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Látható, hogy a fenti egyenletben az érintősík normálvektora az

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektor lesz, hiszen ezek a változók együtthatói az érintősík egyenletében.

## Példa.

Írjuk fel az

$$f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$$

függvény  $(x_0, y_0) = (2, 1)$  pontjához tartozó érintősík egyenletét.

A függvény helyettesítési értéke:  $f(2, 1) = 4 - 3 + 4 = 5$

A parciális deriváltak értékei:

$$f'_x(x, y) = 2xy^3 \quad \Rightarrow \quad f'_x(2, 1) = 4$$

$$f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f'_y(2, 1) = 12 - 3 = 9$$

Így az érintősík egyenlete:

$$z = 4(x - 2) + 9(y - 1) + 5,$$

azaz

$$4x + 9y - z = 12.$$

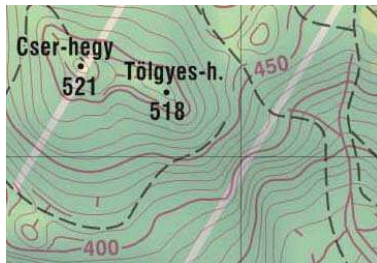
# Gradiens

**Definíció.** Ha egy  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  függvény valamely  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontjában mindkét parciális derivált létezik, akkor  $f$  pontbeli parciális deriváltjainak vektora a **gradiens**, azaz a

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

2–dimenziós vektor.

**Geometriai jelentése:** a gradiens vektor a függvény minden egyes pontjában megadja a legnagyobb meredekség irányát. Pontosán a szintvonalakra merőleges irányba mutat.





## Példa

Írjuk fel az  $f(x, y) = x^2 + y^2$  függvény gradiensét, érintősíkját és az érintősík normálisát az  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  pontban.

## Példa

Írjuk fel az  $f(x, y) = x^2 + y^2$  függvény gradiensét, érintősíkját és az érintősík normálisát az  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  pontban.

Függvényérték:  $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

Parciális deriváltak:  $f'_x(x, y) = 2x \Rightarrow f'_x(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$$f'_y(x, y) = 2y \Rightarrow f'_y(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = 1$$

Gradiens:  $\mathbf{grad} f(x, y) = \nabla f(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow \mathbf{grad} f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 1)$

Érintősík egyenlete:  $z = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}) + 1(y - \frac{1}{2}) + \frac{5}{16} \Rightarrow z = \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{16}$

Érintősík normálvektora:  $\mathbf{n} = (\frac{1}{2}, 1, -1)$ .

Ekkor az  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  ponton áthaladó szintvonal egy kör

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{16}.$$

A körvonal adott pontját és a középpontot összekötő vektor a pont helyvektora  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ , mely párhuzamos a gradiensvektorral! Azaz a gradiens a kör sugárirányába, a körérintőre merőlegesen áll.

## Íránymenti derivált

A parciális deriváltak megadják, hogy az  $x$ - és  $y$ -tengelyek irányába vett felületi görbék mentén mennyi az érintők meredeksége.

Hogyan tudnánk az érintő meredekségét egy tetszőleges, nem a tengelyekkel párhuzamos irányban meghatározni?

## Íránymenti derivált

A parciális deriváltak megadják, hogy az  $x$ - és  $y$ -tengelyek irányába vett felületi görbék mentén mennyi az érintők meredeksége.

Hogyan tudnánk az érintő meredekségét egy tetszőleges, nem a tengelyekkel párhuzamos irányban meghatározni?

**Definíció.** Az  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  függvény valamely  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontjában a  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  vektor irányába eső **íránymenti deriváltja** az

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) := \left\langle \mathbf{grad} f(x_0, y_0), \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right\rangle = \langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v}^* \rangle$$

skalárszorzat, ahol  $\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (v_x^*, v_y^*)$ .

A fenti érték megegyezik az alábbi határértékkel

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((x_0, y_0) + t\mathbf{v}^*) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((x_0 + t \cdot v_x^*, y_0 + t \cdot v_y^*)) - f(x_0, y_0)}{t}. \end{aligned}$$

## Példa

Írjuk fel az  $f(x, y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$  függvény  $\mathbf{v} = (3, 4)$  irányú deriváltját a  $P(1, 2)$  helyen.

## Példa

Írjuk fel az  $f(x, y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$  függvény  $\mathbf{v} = (3, 4)$  irányú deriváltját a  $P(1, 2)$  helyen.

Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 2xy - 3y^3 + 6 \quad \Rightarrow \quad f'_x(1, 2) = 4 - 24 + 6 = -14$$

$$f'_y(x, y) = x^2 - 9xy^2 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1, 2) = 1 - 36 = -35$$

Majd meghatározzuk a  $\mathbf{v}$  irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

## Példa

Írjuk fel az  $f(x, y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$  függvény  $\mathbf{v} = (3, 4)$  irányú deriváltját a  $P(1, 2)$  helyen.

Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 2xy - 3y^3 + 6 \quad \Rightarrow \quad f'_x(1, 2) = 4 - 24 + 6 = -14$$

$$f'_y(x, y) = x^2 - 9xy^2 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1, 2) = 1 - 36 = -35$$

Majd meghatározzuk a  $\mathbf{v}$  irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Az iránymenti derivált meghatározható a gradiens és az adott irányú egységvektor skaláris szorzataként:

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = \langle \mathbf{grad} f(x_0, y_0), \mathbf{v}^* \rangle \quad \Rightarrow$$

$$f'_{(3,4)}(1, 2) = \left\langle (-14, -35), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle = \frac{-42 - 140}{5} = -\frac{182}{5} = -36,4$$

## Példa

Ha úgy vesszük, a parciális deriváltak a  $\mathbf{v} = (1, 0)$  és  $\mathbf{v} = (0, 1)$  irányokban ( $x$  és  $y$  tengelyirányokban) az iránymenti deriváltak, így a példában három iránymenti deriváltat számoltunk ki

$$f'_{(1,0)}(1, 2) = f'_x(1, 2) = -14$$

$$f'_{(0,1)}(1, 2) = f'_y(1, 2) = -35$$

$$f'_{(3,4)}(1, 2) = -36,4$$

Azaz mindhárom irányban különböző értékeket kaptunk a felület adott irányú meredekségére. Határozzuk meg minden pontbeli irányra a meredekség értékét általában!

Mivel  $|\mathbf{v}^*| = 1$ , a skalárszorzat definíciója szerint

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = \langle \mathbf{grad} f(x_0, y_0), \mathbf{v}^* \rangle = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| \cdot 1 \cdot \cos(\alpha).$$

Ahol  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$  vektor által bezárt pozitív forgásirányú szög. Itt tehát a szorzat értéke az adott gradienshossz megszorozva  $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$  számmal.



## Íránymenti derivált szélsőértéke

A gradiensvektor nagysága adott egy pontban, a példában ez

$$|\mathbf{grad}f(1,2)| = \sqrt{(-14)^2 + (-35)^2} = \sqrt{2121} \approx 46,054,$$

vagyis az iránymenti derivált értékét egyedül a gradienssel bezárt szög koszinusza határozza meg, ezért

- az iránymenti derivált értéke akkor maximális, ha a gradiensvektor irányába számítjuk ki, azaz  $\alpha = 0$ ,  $\Rightarrow \cos(\alpha) = 1$ , így  $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| \cdot 1$ , a példában

$$f'_{\mathbf{grad}f(1,2)}(1,2) = f'_{(-14,-35)}(1,2) = \sqrt{2121},$$

- az iránymenti derivált értéke akkor minimális, ha a gradiensvektorral ellenkező irányába számítjuk ki (negatív gradiens irány), azaz  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\Rightarrow \cos(\alpha) = -1$ , így  $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| \cdot -1$ , a példában

$$f'_{-\mathbf{grad}f(1,2)}(1,2) = f'_{(14,35)}(1,2) = -\sqrt{2121},$$

- minden más iránymenti derivált ezen két érték között változik

$$-\sqrt{2121} \leq f'_{\mathbf{v}}(1,2) \leq \sqrt{2121}.$$

## Íránymenti derivált adott irányszögre

Számítsuk ki az  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  felület  $P(1, 2)$  pontjában a gradiensre merőleges, majd az  $x$ -tengely pozitív felével  $\varphi = 45^\circ$  szöget bezáró irányban az iránymenti deriváltat.

A parciális deriváltak  $f'_x(1, 2) = \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2}{5}$  és  $f'_y(1, 2) = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}$ .

A gradiensvektor  $\mathbf{grad}f(1, 2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ , erre merőleges irányok a

$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$  és a  $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ , ahol  $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

$$f'_{\mathbf{v}_1} = \left\langle \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{8}{5} + \frac{8}{5}\right) = 0.$$

Az  $x$ -tengely pozitív felével  $\varphi = 45^\circ$  szöget bezáró irány egységnyi hosszú irányvektora:  $\mathbf{v}_\varphi = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (\cos(45^\circ), \sin(45^\circ)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

$$f'_\varphi = \left\langle \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{6}{5\sqrt{2}}.$$