Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

15. előadás: Totális deriválhatóság. Vektor-vektor függvények Jacobi-mátrixa. Láncszabály.

Ismétlés: differenciálhányados (derivált)

Definíció: Legyen az $f : D_f \to \mathbb{R}$ az x_0 környezetében értelmezett. Ha létezik

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

az f függvény x_0 pontbeli differenciahányados függvényének határértéke, akkor ezt a határértéket f x_0-beli **differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Deriválás lineáris átfogalmazása: Az $f \colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 pontban differenciálható, és deriváltja x_0-ban a, ha létezik egy $\varepsilon(h)$ függvény, melyre ha $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, és

$$f(x_0 + h) = a \cdot h + f(x_0) + \varepsilon(h) \cdot h.$$

Tehát a függvény minden $x = x_0 + h$-ra

$$f(x) = \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}_{\text{érintő: legjobban simuló egyenes}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot (x - x_0)}_{\text{hibatag}}.$$

És az érintő meredeksége pontosan $a = f'(x_0)$.

A totális derivált

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ skalárfüggvény **totálisan differenciálható** az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ belső pontban, ha létezik $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$f(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) + \underline{\varepsilon}(\mathbf{h})^T \cdot \mathbf{h},$$

ahol $\underline{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \underline{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Az "$\mathbf{a}$" vektort az $f(\mathbf{x})$ többváltozós függvény $\mathbf{x}_0$ pontbeli **totális deriváltjának** nevezzük.

A totális derivált

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ skalárfüggvény **totálisan differenciálható** az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ belső pontban, ha létezik $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$f(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) + \underline{\varepsilon}(\mathbf{h})^T \cdot \mathbf{h},$$

ahol $\underline{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \underline{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Az "$\mathbf{a}$" vektort az $f(\mathbf{x})$ többváltozós függvény $\mathbf{x}_0$ pontbeli **totális deriváltjának** nevezzük.

Speciálisan. Az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvényre, ha $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$, akkor $(x, y) = (x_0 + h_x, y_0 + h_y)$, és

$$f(x,y) = (a_x, a_y) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + f(x_0, y_0) + \underline{\varepsilon}(h_x, h_y)^T \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

ahol $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \underline{\varepsilon}(h_x, h_y) = \lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x(h_x, h_y) \\ \varepsilon_y(h_x, h_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Folytonosság és deriválhatóság kapcsolata

Tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan differenciálható az $(x_0, y_0) \in D_f$ pontban, akkor léteznek a pontbeli parciális deriváltak, és a pontban f totális deriváltja megegyezik a gradienssel, azaz

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right).$$

Tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan deriválható az $(x_0, y_0) \in D_f$ pontban, akkor ott folytonos is.

Tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek az $(x_0, y_0) \in D_f$ pont környezetében léteznek a parciális deriváltjai ÉS folytonosak, akkor a függvény a pontban totálisan differenciálható lesz.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x_0} \in D_f$ pontban, ekkor az $f'_{x_i}(\mathbf{x})$ függvény x_j változó szerinti parciális deriváltja, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ ij-edik **másodrendű parciális derivált**jának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \partial^2_{x_i x_j} f(\mathbf{x}_0) = f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)$.

Speciálisan. Ha f kétváltozós függvény, akkor a másodrendű deriváltjai

$$f''_{xx}(x_0, y_0), \quad f''_{xy}(x_0, y_0), \quad f''_{yx}(x_0, y_0), \quad f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Az így kapott (x_0, y_0) pontot jellemző másodrendű deriváltakat gyakran mátrixalakban tüntetjük fel. Ezt a függvény **Hesse-mátrixának** nevezzük.

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Általánosságban ez a mátrix egy n-változós függvényre $n \times n$-es lesz, ami

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x_0}) = \left[f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) \right]_{i,j=1,..n}$$

Példa

Számítsuk ki az $f(x,y)=x^2-3xy^2+xy+y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait. Írjuk fel a Hesse-mátrixot általánosan és az $(1,-2)$ pontban is.

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2x-3y^2+y \\ f'_y(x,y)=-6xy+x+3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(x,y)=2, & f''_{xx}(1,-2)=2, \\ f''_{xy}(x,y)=-6y+1, & f''_{xy}(1,-2)=13, \\ f''_{yx}(x,y)=-6y+1, & f''_{yx}(1,-2)=13, \\ f''_{yy}(x,y)=-6x+6y, & f''_{yy}(1,-2)=-18. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & -6y+1 \\ -6y-1 & -6x+6y \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{H}_f(1,-2)=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}.$$

Második totális deriválhatóság és Young-tétel

Definíció. Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ totálisan deriválható az $\mathbf{x}_0$ egy környezetében és az elsőrendű deriváltjai totálisan deriválhatóak $\mathbf{x}_0$-ban, akkor f **kétszer totálisan deriválható** $\mathbf{x}_0$-ban.

Tétel. (Young) Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ kétszer totálisan deriválható $\mathbf{x}_0$-ban, akkor $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : f''_{ij}(\mathbf{x}_0) = f''_{ji}(\mathbf{x}_0)$.

Tétel. (Kétváltozós Young) Ha $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek léteznek a másodrendű parciális deriváltjai, és ezek folytonosak is az $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ pontban, akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Az előző példában pont ez történt $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -6y + 1$ folytonos függvény, minden pontban egyenlő lesz a két vegyes másodrendű derivált.

Következmény. A Young-tétel feltételeit teljesítő függvények Hesse-mátrixa szimmetrikus.

Vektor-vektor függvények

Definíció. Tegyük fel, hogy $\mathbf{f}$ értelmezve van egy $D_\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^n$ n-dimenziós vektorok egy halmazán, és értékei valós m dimenziós vektorok lesznek, vagyis $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ekkor minden $\mathbf{x} = (x_1, ...x_n) \in D_f$ esetén az $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^m$, tehát

$$\mathbf{f} : \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Az ilyen $\mathbf{f}$ függvényt **vektor-vektor függvénynek** nevezzük. A függvény i-edik **koordináta-függvénye** pedig $f_i : (x_1, ..., x_n) \mapsto f_i(x_1, ..., x_n)$ skalárfüggvény lesz.

Példa. Az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kétváltozós függvény, melynek függvényértékei kétdimenziós vektorok.

$$\mathbf{f} : (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy^3 \end{pmatrix}, \text{ tehát } f_1(x, y) = x^2 - y^2 \text{ és } f_2(x, y) = xy^3,$$

ekkor a függvényérték az $(1, 2)$ pontban $\mathbf{f}(1, 2) = \begin{pmatrix} 1^2 - 2^2 \\ 1 \cdot 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Vektorfüggvények deriválása, totális derivált

Definíció. (totális derivált) Legyen $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektor-vektor függvény és $\mathbf{x_0} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ a $D_{\mathbf{f}}$ halmaz belsejében egy pont. Az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ függvény totálisan deriválható az $\mathbf{x_0}$ pontban, ha létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix melyre

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) + \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h},$$

ahol $\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, olyan hogy $\lim\limits_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{h}) = \underline{\underline{0}}$. Itt $\mathbf{A}$ valós mátrixot az $\mathbf{f}$ függvény $\mathbf{x_0}$ pontbeli **totális deriváltjának** nevezzük.

Speciálisan. $m = 1$ esetén ez az n változós skalárfüggvények totális differenciálhatóságának definíciója. A totális derivált ekkor mindig egy $1 \times n$-es mátrix, azaz egy n dimenziós vektor, ami megegyezik a gradienssel.

Vektorfüggvények deriválása, Jacobi mátrix

Definíció. (parciális deriváltak) Legyen $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektor-vektor függvény és $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ a $D_{\mathbf{f}}$ halmaz eleme, tehát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix},$$

ahol $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az i-edik koordinátafüggvény. Ha $\mathbf{f}$ totálisan deriválható az $\mathbf{x_0} \in D_{\mathbf{f}}$ pontban, akkor léteznek az f_i koordinátafüggvényeknek x_j változók szerinti parciális deriváltjai $\mathbf{x_0}$-ban. Ezeket mátrixba rendezve kapjuk a függvény $\mathbf{x_0}$-ban vett derivált mátrixát, vagy **Jacobi-mátrixát**, azaz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixát.

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixát.

Az $\mathbf{f}$ függvénynek $n = 3$ változója van és $m = 2$ komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x,y,z) = xy - z^2$$

- $\partial_x f_1(x,y,z) = y$
- $\partial_y f_1(x,y,z) = x$
- $\partial_z f_1(x,y,z) = -2z$

$$f_2(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z$$

- $\partial_x f_2(x,y,z) = 2x$
- $\partial_y f_2(x,y,z) = -2y$
- $\partial_z f_2(x,y,z) = 3$

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixát.

Az $\mathbf{f}$ függvénynek $n = 3$ változója van és $m = 2$ komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x,y,z) = xy - z^2$$

- $\partial_x f_1(x,y,z) = y$
- $\partial_y f_1(x,y,z) = x$
- $\partial_z f_1(x,y,z) = -2z$

$$f_2(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z$$

- $\partial_x f_2(x,y,z) = 2x$
- $\partial_y f_2(x,y,z) = -2y$
- $\partial_z f_2(x,y,z) = 3$

Tehát a Jacobi-mátrix:

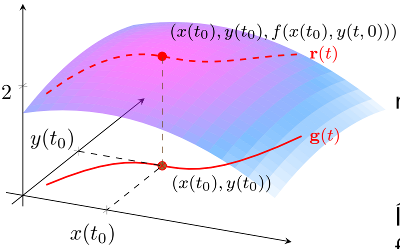
$$\mathbf{A} = \mathbf{f}'(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & -2z \\ 2x & -2y & 3 \end{bmatrix}$$

Görbék a felületen

Speciálisan. Válasszunk az xy-síkban egy kétdimenziós görbét, melyet a

$$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t)) = \mathbf{g}(t)$$

vektorfüggvény ír le. (Vektorfüggvény $n = 1$ változó és $m = 2$ kétdimenziós függvényértékekkel.)



Ekkor egy adott kétváltozós skalárfüggvény grafikonján(felületén)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

megjeleníthetjük a görbe pontjait

$$\mathbf{r} : t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)).$$

Így az $\mathbf{r}(t)$ függvény egy a felületen futó térgörbét ír le.

A két függvény tehát egymásba ágyazva a felületi görbe pontjainak utolsó koordinátáját adja meg:

$$f \circ \mathbf{g} : t \mapsto f(x(t), y(t)) = f(\mathbf{g}(t)) \in \mathbb{R}.$$

Láncszabály - Deriválás felületi görbék mentén

Összetett függvény deriválási szabálya (láncszabály) valós függvények esetén

$$(f \circ g)'(x_0) = [f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Láncszabály felületi görbékre. Ha a létrehozott felületi görbe meredekségét szeretnénk vizsgálni, akkor

$$(f \circ \mathbf{g})'(t_0) = [f(\mathbf{g}(t_0))]' \overset{\text{Láncszabályból}}{=} f'(\mathbf{g}(t_0)) \cdot \mathbf{g}'(t_0) =$$

$$= \mathbf{grad}\, f(x(t_0), y(t_0)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Jelölés: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$= f'_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot \dot{x}(t_0) + f'_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot \dot{y}(t_0).$$

Hiszen $f(x, y)$ kétváltozós skalárfüggvény Jacobi mátrixa a gradiens, és a $\mathbf{g}(t)$ vektorfüggvény deriváltja a koordinátafüggvények deriváltja, azaz egy 2×1-es mátrix.

Vegyük észre!

Abban a speciális esetben, mikor $\mathbf{g}(t) = (x_0 + t\cos(\varphi), y_0 + t\sin(\varphi))$, ahol $(x_0, y_0) = \mathbf{g}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ ponton átmenő φ irányszögű egyenes, akkor

$$(f(\mathbf{g}(t_0)))' = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} =$$

$$= f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos(\varphi) + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin(\varphi).$$

Ami nem más, mint az $f(x, y)$ függvény x-tengely pozitív felével φ szöget bezáró irányban vett iránymenti deriváltja $\left(f'_\varphi(x_0, y_0)\right)$. Speciálisan, ha

- $\varphi = 0$, $\mathbf{g}(t) = (x_0 + t, y_0)$, az x-tengelyirányú parciális derivált, azaz

$$(f(\mathbf{g}(t_0)))' = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f'_x(x_0, y_0),$$

- $\varphi = 90^\circ$, $\mathbf{g}(t) = (x_0, y_0 + t)$ az y-tengelyirányú parciális derivált, azaz

$$(f(\mathbf{g}(t_0)))' = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f'_y(x_0, y_0).$$

Láncszabály - Általánosan

Láncszabály. Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{g} : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^n$ vektorfüggvények, valamint $\mathbf{x_0} \in D_\mathbf{g}$ olyan, hogy $\mathbf{g}(\mathbf{x_0}) \in D_\mathbf{f}$. Legyen továbbá $\mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}_0$-ban és $\mathbf{f}$ differenciálható $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$-ban. Ekkor $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban, és

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$$

Jacobi-mátrixok szorzata lesz, azaz egy $m \times s$-es mátrix.

- A hagyományos egyváltozós valós függvények láncszabálya az $s = n = m = 1$ eset.
- A korábban megvizsgált felületi görbék deriválási szabálya az $s = 1 = m$, $n = 2$ eset.

Példa

Legyen $f(x,y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Példa

Legyen $f(x,y) = \dfrac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \left(\tfrac{1}{3}xy^3, \tfrac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Példa

Legyen $f(x,y) = \dfrac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \left(\tfrac{1}{3}xy^3, \tfrac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Az $f(x,y)$ Jacobi-mátrixa a $g(t)$ helyen:

$$f'(\mathbf{g}(t)) = f'(x(t), y(t)) = \left(\tfrac{1}{3}t^3(t^2)^3, \tfrac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2\right) = \left(\tfrac{1}{3}t^9, \tfrac{1}{2}t^{10}\right).$$

Példa

Legyen $f(x,y) = \dfrac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \left(\tfrac{1}{3}xy^3, \tfrac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Az $f(x,y)$ Jacobi-mátrixa a $g(t)$ helyen:

$$f'(\mathbf{g}(t)) = f'(x(t), y(t)) = \left(\tfrac{1}{3}t^3(t^2)^3, \tfrac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2\right) = \left(\tfrac{1}{3}t^9, \tfrac{1}{2}t^{10}\right).$$

Tehát a láncszabály alapján:

$$(f \circ \mathbf{g})'(t) = \left(\frac{1}{3}t^9, \frac{1}{2}t^{10}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = t^{11} + t^{11} = 2t^{11}.$$

Példa

Legyen $f(x,y)=\dfrac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t)=(t^3,t^2)$. Határozzuk meg az $(f\circ\mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t^2\\ 2t\end{pmatrix},$$

és az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x,y)=(f'_x(x,y),f'_y(x,y))=\left(\tfrac{1}{3}xy^3,\tfrac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Az $f(x,y)$ Jacobi-mátrixa a $g(t)$ helyen:

$$f'(\mathbf{g}(t))=f'(x(t),y(t))=\left(\tfrac{1}{3}t^3(t^2)^3,\tfrac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2\right)=\left(\tfrac{1}{3}t^9,\tfrac{1}{2}t^{10}\right).$$

Tehát a láncszabály alapján:

$$(f\circ\mathbf{g})'(t)=\left(\frac{1}{3}t^9,\frac{1}{2}t^{10}\right)\cdot\begin{pmatrix}3t^2\\ 2t\end{pmatrix}=t^{11}+t^{11}=2t^{11}.$$