

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

16. előadás:
Kétváltozós függvények lokális szélsőértékei.
Hesse-féle determináns.

Lokális szélsőértékek

Definíció. Egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont **nyílt, ε sugarú környezete** az \mathbf{x}_0 középpontú, ε sugarú gömb belseje, azaz

$$K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon\}.$$

Definíció. Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek **lokális minimuma(maximuma)** van egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha \mathbf{x}_0 -nak van egy olyan $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ környezete, hogy minden $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ esetén

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad (f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)).$$

Tétel. (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele) Ha az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor \mathbf{x}_0 -ban az összes létező parciális deriváltja 0.

Indoklás. A kétváltozós függvények szélsőértékhelyein a felület érintősíkja vízszintes, tehát az érintősík normálvektorának x - és y -koordinátája is 0 kell legyen.

Definíció. Az olyan $\mathbf{x}_0 \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ pontot, melyre az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény összes parciális deriváltja 0, az f **stacionárius pontjának** nevezzük.

Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele

Tétel. (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele) Ha az (x_0, y_0) pontban az $f(x, y)$ függvény olyan, hogy

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont}),$$

továbbá a második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, és

$$\det(\mathbf{Hesse}f(x_0, y_0)) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

azaz a Hesse-féle mátrix determinánusa pozitív, akkor lokális szélsőértéke van a függvénynek a pontban.

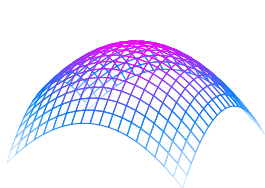
Ekkor

- ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (ugyanakkor $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$), akkor lokális minimuma van,
- a $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (ugyanakkor $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$), akkor lokális maximuma van.

Stacionárius pontok osztályozása

Ha a (x_0, y_0) stacionárius pontja f -nek, azaz

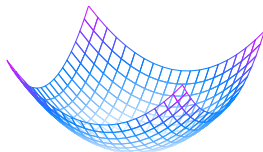
$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$



Lokális maximum

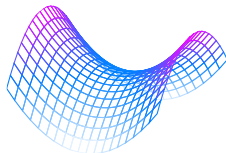
$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

$$(f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2) \Big|_{(x_0, y_0)} > 0$$



Lokális minimum

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$$



Nyeregpont

$$(f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2) \Big|_{(x_0, y_0)} < 0$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3.$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3.$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 1 - 9x^2 \quad \Rightarrow 1 - 9x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$f'_y(x, y) = 4 - 9y^2 \quad \Rightarrow 4 - 9y^2 = 0 \quad \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}$$

A stacionárius pontok: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = -18x \quad f''_{xy}(x, y) = 0 \quad f''_{yy}(x, y) = -18y$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = (-18x)(-18y) - 0^2 = 324xy$$

$$\text{Így: } \left\{ \begin{array}{lll} (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & 72 > 0; -6 < 0 & \text{lokális maximum, } f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 3 \\ (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) & -72 < 0 & \text{nyeregpont} \\ (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & -72 < 0 & \text{nyeregpont} \\ (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) & 72 > 0; 6 > 0 & \text{lokális minimum, } f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = -1 \end{array} \right.$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y).$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y).$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = (2x - 6)(y^2 - 4y)$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 - 6x)(2y - 4)$$

Egy stacionárius pontban mindkettőnek el kell tűnnie. Ha az x szerinti 0:

$$(2x - 6)(y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

vagy

$$y^2 - 4y = 0$$

$$x = 3$$

$$(y - 4)y = 0$$

$$y = 4 \quad y = 0$$

Az y szerinti parciális deriváltból: $(x^2 - 6x)(2y - 4) = 0$.

Ha $x = 3$, akkor $-9(2y - 4) = 0$, $\Rightarrow y = 2$.

Ha $y = 4$, akkor $x = 0$ vagy $x = 6$; ha $y = 0$ akkor $x = 0, 6$ szintén.

Tehát a stacionárius pontok: $(3, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$.

Példa folytatása

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= (2x - 6)(y^2 - 4y) & f''_{xx}(x, y) &= 2(y^2 - 4y) \\f'_y(x, y) &= (x^2 - 6x)(2y - 4) & \Rightarrow f''_{xy}(x, y) &= (2x - 6)(2y - 4) \\ & & f''_{yy}(x, y) &= 2(x^2 - 6x)\end{aligned}$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 2(y^2 - 4y) \cdot 2(x^2 - 6x) - (2x - 6)^2(2y - 4)^2$$

	(3, 2)	144 > 0	lokális szélsőérték
	(0, 0)	-576 < 0	nyeregpont
A stacionárius pontok:	(0, 4)	-576 < 0	nyeregpont
	(6, 0)	-576 < 0	nyeregpont
	(6, 4)	-576 < 0	nyeregpont

Tehát csak a (3, 2) pont lokális szélsőérték (többi nyeregpont).

Mivel $f''_{xx}(3, 2) = -8 < 0$, így a (3, 2) pont lokális maximumhely.

A lokális maximum értéke: $f(3, 2) = 36$.

Szöveges szélsőértékszámítási feladat

Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Szöveges szélsőértékszámítási feladat

Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Legyenek az oldalhosszak $a, b, c > 0$. Tudjuk, hogy a térfogat 1

$$1 = abc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{ab}.$$

A felhasznált anyag: $ab + 2bc + ac$. Ezekből a minimalizálandó függvény

$$f(a, b) = ab + \frac{2b}{ab} + \frac{a}{ab} = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}.$$

Szöveges feladat folytatás

$$f(a, b) = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = b - \frac{2}{a^2} \quad \Rightarrow b - \frac{2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow a^2 b = 2$$

$$f'_b(a, b) = a - \frac{1}{b^2} \quad \Rightarrow a - \frac{1}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow ab^2 = 1$$

Amiből $a^3 b^3 = 2$, azaz $ab = \sqrt[3]{2}$. Így

$$a = \frac{a^2 b}{ab} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Tehát az egyetlen stacionárius pont a $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{aa}(a, b) = \frac{4}{a^3} \quad f''_{ab}(a, b) = 1 \quad f''_{bb}(a, b) = \frac{2}{b^3}$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{aa}(a, b) \cdot f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{4}{a^3} \frac{2}{b^3} - 1^2 = \frac{8}{a^3 b^3} - 1$$

Ennek az értéke a stacionárius pontban $3 > 0$, így ez lokális szélsőérték.

Mivel $f''_{aa}\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) > 0$, ezért ez lokális minimumhely. Ekkor $c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Szöveges feladat második kérdése

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Ekkor a felhasznált anyag: $ab + 2bc$.

$$f(a, b) = ab + \frac{2}{a}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = b - \frac{2}{a^2}$$

$$f'_b(a, b) = a \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Nincs megoldás, mivel $a > 0$ kell legyen.

Magasabb dimenziós eset

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontban a függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_{x_1}(P_0) = f'_{x_2}(P_0) = \dots = f'_{x_n}(P_0) = 0 \quad (P_0 \text{ stacionárius pont})$$

és

$$f''_{x_1x_1}(P_0), \left| \begin{array}{cc} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{ccc} f''_{x_1x_1}(P_0) & \dots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \dots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{array} \right|$$

- mindegyike pozitív, akkor P_0 lokális minimum.
- váltakozó előjelű és $f''_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor P_0 lokális maximum.