Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

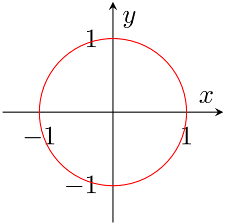
Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

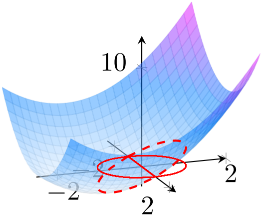
17. elődás:
Feltételes szélsőérték számítás, Lagrange-szorzók.

Bevezető feladat - Feltételes szélsőértékszámítás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Tehát az adott felület $f(x, y)$ szélsőértékeit "csak" egy felületi görbe, az $x^2 + y^2 = 1$ kör felett elhelyeszkedő felületi pontok között keressük.

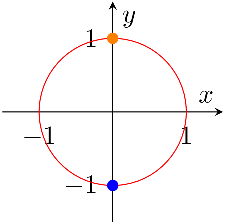


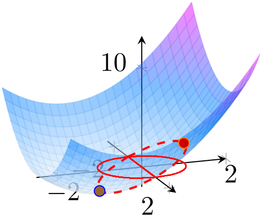


Bevezető feladat - Feltételes szélsőértékszámítás

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Tehát az adott felület $f(x,y)$ szélsőértékeit "csak" egy felületi görbe, az $x^2 + y^2 = 1$ kör felett elhelyeszkedő felületi pontok között keressük.





Ha $x^2 + y^2 = 1$, akkor a függvény:

$$f(x,y) = 1 + 2y - 1 = 2y$$

Az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből az is következik, hogy $-1 \le y \le 1$, így a függvényérték minimuma -2, ha $y = -1$, és a függvény maximuma 2, ha $y = 1$.

Feltételes szélsőérték kétváltozós függvényekre. Az $f(x,y)$ függvény lokális szélsőértékeit keressük a $g(x,y)=0$ feltétel mellett. Ekkor tekintsük az

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

háromváltozós **Lagrange-függvényt**, ahol λ a **Lagrange-multiplikátor**.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele). Ha az $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvénynek léteznek a parciális deriváltjai és folytonosak, és az $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ **pontban lokális szélsőértéke van a** $g(x,y)=0$ **feltétel mellett**, továbbá $g(x,y)$ függvény parciális deriváltjai léteznek és nem mind nullák, akkor a megfelelő pontban az $F(x,y,\lambda)$ függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

Megjegyzés. A $F'_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y)=0$ feltétel pontosan a szélsőértékhely keresésének kitűzött feltétele.

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x,y)$ és $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x,y) = 2x$ és $f'_y(x,y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x,y) = 2x$ és $g'_y(x,y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x,y,\lambda)$ praciális deriváltjait

$$F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1$$

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x,y)$ és $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x,y) = 2x$ és $f'_y(x,y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x,y) = 2x$ és $g'_y(x,y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x,y,\lambda)$ praciális deriváltjait

$$F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 \qquad \Rightarrow g(x,y) = 0 \text{ miatt } = 0$$

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x,y)$ és $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x,y) = 2x$ és $f'_y(x,y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x,y) = 2x$ és $g'_y(x,y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x,y,\lambda)$ praciális deriváltjait a $(0,1)$ pontban

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + 2\lambda x = (2\lambda+2)x && \Rightarrow x = (2\lambda+2)0 = 0 \\
F'_y(x,y,\lambda) &= 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda+2)y + 2 && \Rightarrow y = (2\lambda+2)1 + 2 = \\
& && = 2\lambda + 4 = 0, \text{ ha } \lambda = -2 \\
F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1 && \Rightarrow g(x,y) = 0 \text{ miatt } = 0
\end{aligned}$$

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x,y)$ és $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x,y) = 2x$ és $f'_y(x,y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x,y) = 2x$ és $g'_y(x,y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x,y,\lambda)$ praciális deriváltjait a $(0,-1)$ pontban

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x && \Rightarrow x = (2\lambda+2)0 = 0 \\
F'_y(x,y,\lambda) &= 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2 && \Rightarrow y = (2\lambda+2)(-1) + 2 = \\
& && = -2\lambda = 0, \text{ ha } \lambda = 0 \\
F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1 && \Rightarrow g(x,y) = 0 \text{ miatt } = 0
\end{aligned}$$

Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele). Ha az (x_0, y_0) pont környezetében az $f(x,y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, és $g(x,y)$ függvény parciális deriváltjai léteznek és nem mind nullák, továbbá egy (λ_0, x_0, y_0) stacionárius pontban, ahol

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$$

teljesül, hogy $F(x, y, \lambda)$ Hesse-féle determinánsa

$$\det(F(x_0, y_0, \lambda_0)) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)^2 -$$
$$-F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_y(x_0, y_0)^2$$

- pozitív, akkor **lokális maximuma** van
- negatív, akkor **lokális minimuma** van

az (x_0, y_0) pontban az $f(x,y)$ függvénynek a $g(x,y) = 0$ feltétel mellett.

(DE HA $g'_x(x_0, y_0) = 0$ és $g'_y(x_0, y_0) = 0$, akkor a determináns 0, nem tudjuk van-e szélsőérték!)

Bevezető példában

A stacionárius pontok $(0, 1, -2)$ és $(0, -1, 0)$, továbbá a másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= (2\lambda+2)x \\ F'_y(x,y,\lambda) &= (2\lambda+2)y+2 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+y^2-1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F''_{xx}(x,y,\lambda) &= 2\lambda+2 \\ F''_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \\ F''_{yy}(x,y,\lambda) &= 2\lambda+2 \\ F''_{\lambda x}(x,y,\lambda) &= 2x \\ F''_{\lambda y}(x,y,\lambda) &= 2y \end{aligned}$$

Így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda+2 & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda+2 & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -4x^2(2\lambda+2)-4y^2(2\lambda+2) = -8(x^2+y^2)(\lambda+1),$$

– ami a $(0, 1, -2)$ pontban $(-8 \cdot 1 \cdot (-1) = 8)$ pozitív, így itt lokális maximum van,

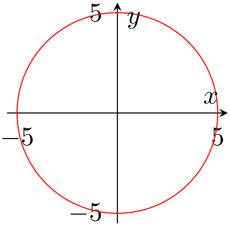
– míg a $(0, -1, 0)$ pontban $(-8 \cdot 1 \cdot 1 = -8)$ negatív, így itt lokális minimum van.

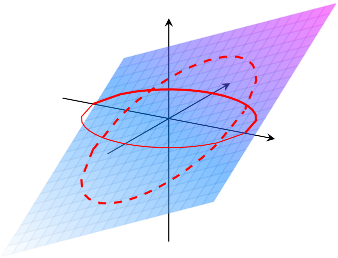
Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!

Példa

Keressük meg az $f(x,y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!





Példa

Keressük meg az $f(x,y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!

A $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$, és így

$$F(x,y,\lambda) = 6x + 8y - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x,y,\lambda) = 6 + \lambda \cdot 2x = 6 + 2\lambda x \qquad \Rightarrow x = -\frac{6}{2\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = 8 + \lambda \cdot 2y = 8 + 2\lambda y \qquad \Rightarrow y = -\frac{8}{2\lambda} = -\frac{4}{\lambda}$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 25$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve:

$$\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2 = 25, \quad \Rightarrow \frac{25}{\lambda^2} = 25, \quad \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Tehát a stacionárius pontok: $(-3,-4,1)$ és $(3,4,-1)$.

Példa folytatása

A másodrendű parciális deriváltak:

$$
\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= 6 + 2\lambda x \\
F'_y(x,y,\lambda) &= 8 + 2\lambda y \\
F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 25
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
F''_{xx}(x,y,\lambda) &= 2\lambda \\
F''_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \\
F''_{yy}(x,y,\lambda) &= 2\lambda \\
F''_{\lambda x}(x,y,\lambda) &= 2x \\
F''_{\lambda y}(x,y,\lambda) &= 2y
\end{aligned}
$$

Így a Hesse-determináns:

$$
\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda,
$$

– ami a $(-3,-4,1)$ pontban negatív, így itt lokális minimum van,
– míg a $(3,4,-1)$ pontban pozitív, így itt lokális maximum van.

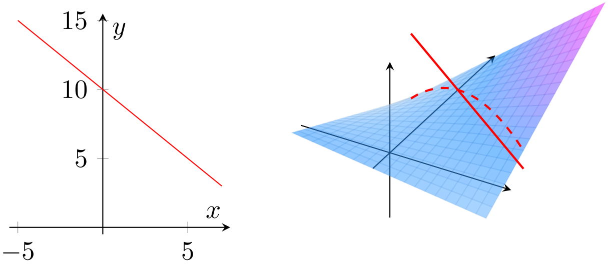
Az adott feltétel mellett a függvény
(lokális) minimuma: $f(-3,-4) = -60$,
(lokális) maximuma: $f(3,4) = 40$.

Feladat

Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$-nak, ha $x + y = 10$?

Feladat

Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$-nak, ha $x + y = 10$?



Feladat

Mennyi a maximuma $f(x,y) = xy$-nak, ha $x+y=10$?

$$f(x,y) = xy$$
$$g(x,y) = x+y-10$$
$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x+y-10)$$

A paciális deriváltak:

$$F'_x(x,y,\lambda) = y+\lambda \qquad \Rightarrow y = -\lambda$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = x+\lambda \qquad \Rightarrow x = -\lambda$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-10 \qquad \Rightarrow -\lambda + (-\lambda) - 10 = 0$$

$\lambda = -5$, és így $x = y = 5$. Azaz egyetlen stacionárius pont van: $(5,5,-5)$. Hesse-féle determináns itt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Tehát az $(5,5)$ pont lokális maximumhelye a függvénynek az adott feltétel mellett. A maximum értéke: $f(5,5) = 25$.

Szélsőérték keresése korlátos és zárt tartományon

Az $f(x, y)$ függvény (abszolút) minimumát és maximumát keressük egy megadott $B = \{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$ tartományon.

Először megkeressük az f függvény lokális szélsőértékeit, melyek közül csak a tartományba esőket vesszük figyelembe. (B belső pontjai között keresünk.)

Majd az f függvény szélsőértékeit megkeressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett a Lagrange-függvénnyel. (B határpontjai között keresünk.)

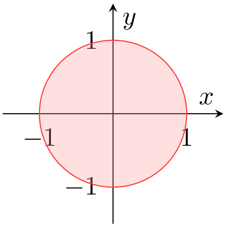
A kapott eredményekből megállapítjuk az abszolút minimumot és maximumot.

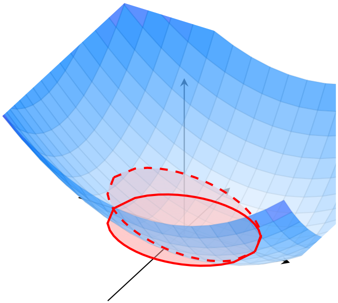
Példa

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egység-körlapon, azaz $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartomány felett.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egységkörlapon, azaz $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartomány felett.





Példa

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egység-körlapon, azaz $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartomány felett.

Először lokális szélsőértékeket keresünk. Ehhez a parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 2x - 1,$$
$$f'_y(x,y) = 2y.$$

Egyetlen stacionárius pont van: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, mely a tartományba esik.
A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2, \\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) &= 0, \\ f''_{yy}(x,y) &= 2. \end{aligned}$$

A Hesse-determináns $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, tehát az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ lokális szélsőérték, mégpedig lokális minimum $(2 > 0)$.
A lokális minimum értéke: $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

Példa folytatása

A Lagrange függvény

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

A paciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x - 1 + \lambda 2x, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= 2y + \lambda 2y, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1. \end{aligned}$$

Ha $F'_y(x,y,\lambda)$ eltűnik, akkor $y = 0$ vagy $\lambda = -1$, viszont az utóbbi esetben $F'_x(x,y,\lambda) = -1$. Tehát $y = 0$ és a harmadik egyenletből $x = \pm 1$. A stacionárius pontok tehát: $\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-1, 0, -\frac{3}{2}\right)$.

A Hesse-determináns

$$\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2+2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -(2x)^2(2+2\lambda) - (2y)^2(2+2\lambda) = -8(1+\lambda)(x^2+y^2).$$

A $\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ lokális minimumhely, értéke: $f(1,0) = 0$.
A $\left(-1, 0, -\frac{3}{2}\right)$ lokális maximumhely, értéke: $f(-1,0) = 2$.
A függvény abszolút minimuma $-\frac{1}{4}$, míg abszolút maximuma 2.