Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

18. előd́ás:
Valós számsorozatok (ismétlés).
Numerikus sorok fogalma.
Nevezetes sorok.

Valós számsorozatok (ismétlés)

Azokat a függvényeket, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza ($\mathbb{Z}^+$) és értékkészlete a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$), **valós számsorozatoknak (numerikus sorozatoknak)** nevezzük.

$$\mathbb{Z}^+ \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$$

a_n	-	a sorozat n-dik eleme, megadja az általános hozzárendelési szabályt
$\{a_n\}$	-	a sorozat maga, összes elemével

Sorozatok fontos tulajdonságai

- monotonitás,
- korlátosság,
- konvergencia,
- nevezetes határértékek és Rendőr-elv.

Numerikus sorozatok tulajdonságai (ismétlés)

Definíció. (Monotonitás) Azt mondjuk, hogy egy $\{a_n\}$ számsorozat **monoton növekvő (csökkenő)**, ha minden n esetén

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}).$$

Definíció. (Korlátosság)

- Az $\{a_n\}$ sorozat **felülről(alulról) korlátos**, ha elemeinek halmaza felülről(alulról) korlátos, azaz $\exists K(k) \in \mathbb{R}$, úgy hogy

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \, a_n \leq K(\geq k).$$

- Az $\{a_n\}$ sorozat **korlátos**, ha felülről és alulról is korlátos.

Numerikus sorozatok konvergenciája (ismétlés)

Definíció. (Határérték) $\{a_n\}$ valós számsorozat az $A \in \mathbb{R}$ számhoz tart, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N_ε küszöbindex, melytől kezdve ha $n > N_\varepsilon$, akkor

$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad \text{azaz } \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **divergens**, ha nem konvergens (nincs határértéke).

Tétel. (monotonitás+korlátosság⇒konvergencia) Monoton és korlátos sorozat konvergens.

Tétel. (konvergencia⇒korlátosság) Konvergens sorozat korlátos.

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$-re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = H$.

Nevezetes sorozatok (ismétlés)

Konstans sorozatok: $a_n = c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Alternáló sorozat: $a_n = (-1)^n \cdot |a_n|$, ha $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, divergens.

Geometriai sorozat: $a_n = A \cdot q^n,\ A, q \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ A \cdot 1, \text{ ha } q = 1, \\ \infty, \text{ ha } q > 1, \\ \text{div., ha } q \leq -1, \end{cases}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1\,(q > 0), \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\underset{a>1}{\log_a(n)} \ll \underset{k>1}{\sqrt[k]{n}} \ll n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n} \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \underset{a>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \underset{k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{\sqrt[k]{n}} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0.$$

Numerikus sorok

Definíció. Legyen $\{a_n\}$ egy numerikus sorozat, ekkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

formális végtelen összeget **numerikus sornak** nevezzük. A sor **tagjai** az a_n sorozatelemek. A sor **n-edik részletösszege** az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

véges összeg. Azt a sorozatot, melynek elemei a sor s_n részletösszegei, a sor $\{s_n\}$ **részletösszeg-sorozatának** nevezzük.

Definíció. A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor **konvergens**, ha a hozzá tartozó $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozat konvergens, és határértékét a sor **összegének** mondjuk. A **sor divergens**, ha $\{s_n\}$ sorozat nem konvergens.

Konvergens sorok tulajdonságai

Megjegyzés. A szumma más indextől is indulhat. Ha néhány tagot a sorhoz hozzáveszünk, illetve elhagyunk, az a konvergenciát nem változtatja meg, de a sorösszeget **IGEN**!

Tétel. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ sorok konvergensek és az összegük adott, akkor

- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = A + B$, és
- $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda A \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Mindez természetesen következik a sorozatokra tanult határértékszámítási tételekből.

Példa

Állapítsuk meg az $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens-e.

A részletösszegek sorozata

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \ldots \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n},$$

Példa

Állapítsuk meg az $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens-e.

A részletösszegek sorozata

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \dots \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

ekkor $s_n = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$,

Példa

Állapítsuk meg az $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens-e.

A részletösszegek sorozata

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \dots \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

ekkor $s_n = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$,

ami konvergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

tehát a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ sor konvergens és a sor összege 2.

Geometriai (mértani) sor

Az előző példa általánosan, ha $a_n = A \cdot q^n$, állapítsuk meg a részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens-e.

A részletösszegek sorozata

$$s_0 = A, \quad s_1 = A \cdot (1 + q), \quad s_2 = A \cdot (1 + q + q^2), \quad \dots \quad s_n = A \cdot (1 + q + \dots + q^n),$$

Geometriai (mértani) sor

Az előző példa általánosan, ha $a_n = A \cdot q^n$, állapítsuk meg a részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens-e.

A részletösszegek sorozata

$$s_0 = A, \quad s_1 = A\cdot(1+q), \quad s_2 = A\cdot(1+q+q^2), \quad \dots \quad s_n = A\cdot(1+q+\cdots+q^n),$$

ekkor $s_n = A \cdot \dfrac{(1-q)\,(1+q+\cdots+q^n)}{1-q} = A \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

Geometriai (mértani) sor

Az előző példa általánosan, ha $a_n = A \cdot q^n$, állapítsuk meg a részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens-e.

A részletösszegek sorozata

$s_0 = A, \quad s_1 = A \cdot (1+q), \quad s_2 = A \cdot (1+q+q^2), \quad \ldots \quad s_n = A \cdot (1+q+\cdots+q^n),$

ekkor $s_n = A \cdot \dfrac{(1-q)\,(1+q+\cdots+q^n)}{1-q} = A \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,
melynek határértéke

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} A \cdot \dfrac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1, \\ \text{divergens egybként.} \end{cases}$$

Tehát a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A \cdot q^n$ sor konvergens, ha $|q| < 1$ és a sor összege $A \cdot \dfrac{1}{1-q}$.

Példa – Geometriai sor

Számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$ sor összegét, ha az véges.

Példa – Geometriai sor

Számítsuk ki a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$ sor összegét, ha az véges.

Ha a geometriai sorról tanultakat szeretnénk alkalmazni, akkor az előző-ekben látott alakra kell hoznunk az összegezendő kifejezést.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^n}{3^{-1} \cdot 9^n} = 12 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n .$$

Az összegképlet akkor használható fel $A = 12$ és $q = 2/9\,(< 1)$ paraméte-rekkel, ha a szumma 0-tól indul.

$$12 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 12 \cdot \left(-1 - \frac{2}{9} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) = 12 \cdot \left(-1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{1 - \frac{2}{9}}\right) =$$

$$= 12 \cdot \left(-\frac{11}{9} + \frac{9}{7}\right) = 12 \cdot \frac{4}{63} = \frac{48}{63} = \frac{16}{21}.$$

Példa – Teleszkópikus összegek

Számítsuk ki a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ sor összegét.

Példa – Teleszkópikus összegek

Számítsuk ki a $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ sor összegét.

Bontsuk parciális törtekre az $\dfrac{1}{k(k+1)}$ törtet:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)} \Rightarrow A = 1,\ B = -1$$

Ekkor a részletösszegek értéke

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

A zárójeles kifejezésben lévő negatív előjelű rész mindig kiesik az utána jövő tag pozitív részével. Így csak az első tag pozitív és az utolsó tag negatív része marad bent az összegzésben, minden más összecsúszik, mint a teleszkóp:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Példa – Harmónikus sor

Azt a sort, mely a pozitív egészek reciprokait összegzi, **harmónikus sornak** nevezzük

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

A harmónikus sor **divergens.** Mivel a részletösszegek sorozatából ki tudunk választani egy divergens részsorozatot. Legyen $n = 2^{k+1}, k = 1, 2, \dots$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \dots \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{>2^k\frac{1}{2^{k+1}}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^k\frac{1}{2^{k+1}} = 1 + (k+1)\frac{1}{2}.$$

ez a számsorozat a végtelenbe tart, ezért $s_n \to \infty$ szintén (Rendőr-elv). Szimbólikus jelölésként írhatjuk a végtelenbe tartó divergens sorokra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Példa – Alternáló sorok

Ha a sor tagjai váltakozó előjelűek, akkor **alternáló** soroknak mondjuk őket.

Példa 1. Legyen $a_k = (-1)^k$, ekkor

$$s_n = (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \begin{cases} -1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ezért a sor **divergens**. **Tilos** átzárójelezni – végtelen sok zárójelet kitenni a tagok közé, mert megváltoztathatjuk a divergenciát!

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = \underbrace{((-1)+1)}_{=0} + \underbrace{((-1)+1)}_{=0} \ldots \overset{???}{=} 0, \quad \text{nem igaz.}$$

Példa 2. Ha $a_k = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{1}{k}$, akkor a sort **alternáló harmónikus sornak** hívjuk.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Később belátjuk majd, hogy **konvergens**.