# Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

# 19. előadás:
# Numerikus sorok konvergenciája.
# Konvergenciakritériumok.
# Leibniz-típusú sorok konvergenciája.

# Numerikus sorok

**Definíció.** Legyen $\{a_n\}$ egy numerikus sorozat, ekkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

formális végtelen összeget **numerikus sornak** nevezzük. A sor **tagjai** az $a_n$ sorozatelemek. A sor **$n$-edik részletösszege** az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

véges összeg. Azt a sorozatot, melynek elemei a sor $s_n$ részletösszegei, a sor $\{s_n\}$ **részletösszeg-sorozatának** nevezzük.

**Definíció.** A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor **konvergens**, ha a hozzá tartozó $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozat konvergens, és határértékét a sor **összegének** mondjuk. A **sor divergens**, ha $\{s_n\}$ sorozat nem konvergens.

# Numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele

**Tétel:** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nem bizonyítjuk, de az állítás helytálló, mert ha egy összeg elemei nem csökkenek, mondjuk egy indextől $a_n > k$, akkor végtelen sokszor összeadva a $k$ számot ezzel alulról becsüljük a sorösszeget, ugyanakkor $n \cdot k \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ így az összeg nem lehet véges.

- Ha a feltétel nem teljesül, akkor a sor nem lehet konvergens!

  Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{3}{n+1}$ nem konvergens, mert $n > 5$-re $a_n > \frac{1}{2}$.

- Fordítva nem igaz az előbbi tétel: az, hogy az általános tag tart a $0$-hoz nem elégséges feltétele a konvergenciának.

  Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmónikus sor divergens, bár $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

# Műveletek numerikus sorokkal

**Tétel:** Konvergens numerikus sorokkal végezhető műveletek.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok konvergensek, akkor

- szabad bárhová zárójeleket beiktatni (azaz zárójelek segítségével több egymás után következő tagot egy taggá összefoglalni), ezzel sem a konvergencia, sem pedig a sorösszeg nem változik meg,
- szabad véges sok tagot hozzávenni a sorhoz vagy elhagyni belőle, ezzel a konvergencia nem változik, DE a sorösszeg igen!
- szabad a sorokat tagonként összeadni

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n,$$

- szabad a sort tagonként egy számmal beszorozni

$$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n.$$

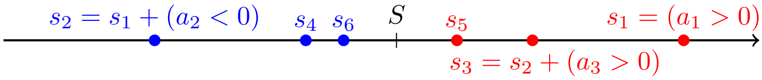
## Leibniz-sor

**Definíció.** A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sor Leibniz-sor**, vagy Leibniz típusú sor, ha

- $a_n$ sorozat váltakozó előjelű, azaz alternáló,
- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$,
- $|a_n|$ monoton csökkenő sorozat.

**Tétel.** Minden Leibniz-sor konvergens.

**Szemléltetés:**




**Példa:** Az alternáló harmónikus sor Leibniz-sor, ezért konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

## Példák

**1.** Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

## Példák

**1.** Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk a sorelemek abszolút értékének sorozatát:

$|a_n| = \frac{n+3}{2n-1}$, amire $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$,

tehát nem teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, ezért a sor nem lesz konvergens.

## Példák

**1.** Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk a sorelemek abszolút értékének sorozatát:

$|a_n| = \dfrac{n+3}{2n-1}$, amire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$

tehát nem teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, ezért a sor nem lesz konvergens.

**2.** Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\cdot\pi)}{\sqrt{n}}$ sor konvergenciáját.

## Példák

**1.** Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk a sorelemek abszolút értékének sorozatát:

$$|a_n|=\frac{n+3}{2n-1}, \text{ amire } \lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

tehát nem teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, ezért a sor nem lesz konvergens.

**2.** Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\cdot\pi)}{\sqrt{n}}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, mivel $\cos(n\cdot\pi)=(-1)^n$, így vizsgáljuk a sorelemek abszolút értékének sorozatát:

$$|a_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ amire } \lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

emellett pedig $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, hiszen $\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$,

tehát teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, a sor konvergens.

**Definíció.** **Pozitív tagú sor**nak nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort, ha minden $n$-re

$$a_n \geq 0.$$

**Megjegyzés.** A pozitív tagú sorok részletösszeg sorozata monoton növekedő, azaz

$$s_1 = a_1 \ \leq \ s_2 = a_1 + (a_2 \geq 0) \ \leq \ s_3 \ \leq \ s_4 \ \leq \ldots .$$

**Tétel.** Ha egy pozitív tagú sor divergens, akkor összege $\infty$, azaz a végtelenbe tart.

Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

**Tétel.** Ha egy pozitív tagú sor részletösszegeinek sorozata korlátos, akkor a sor konvergens.

# Pozitív tagú sorok konvergencia-kritériumai

**Tétel.** Legyen $0 \leq a_n \leq b_n$ igaz minden $n > N$ indextől kezdve.

- **Majoráns kritérium.**

  Ekkor ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$.

- **Minoráns kritérium.**

  Ekkor ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

**Példa.**

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^2-n+2}$ sor konvergenciáját.

$$\frac{n-1}{n^2-n+2} \underset{\text{ha } n>2}{\geq} \frac{\frac{1}{2}n}{n^2} = \frac{1}{2n},$$

azaz a $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor, mely a harmonikus sor $\frac{1}{2}$-szerese, divergens minoráns sora az eredetinek. Ezért az eredeti sor is divergens.

# Példa

Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

## Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot,

# Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével $(n \to (n-1))$ növeljük.

## Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével $(n \to (n-1))$ növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk,

## Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1 + 1 = 2$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével $(n \to (n-1))$ növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk, ami összegezhető és 1 volt az összeg.

Alkalmazhatjuk tehát a majoráns kritériumot és ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 < \infty$ konvergens.

# Hiperharmonikus sorok

**Definíció.**

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ alakú sorokat **hiperharmonikus soroknak** nevezzük.

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $p = 1$ és $p = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $p = 1$-re divergens, de $p = 2$-re már konvergens.

**Kérdés:** Milyen $p$ értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?

# Hiperharmonikus sorok

**Definíció.**

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ alakú sorokat **hiperharmonikus soroknak** nevezzük.

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $p = 1$ és $p = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $p = 1$-re divergens, de $p = 2$-re már konvergens.

**Kérdés:** Milyen $p$ értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?

**Tétel.**

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$.

Nem bizonyítjuk, de emlékeztető:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} p > 1 & \dfrac{1}{p-1} \\ p \leq 1 & \text{divergens} \end{cases} .$$

# Példa

Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1}$ sor konvergenciáját.

# Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező harmadfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig másodfokú. És az előbbi tétel miatt sejtjük, hogy ez a sor konvergens. Ennek bizonyításához pedig majoráns kritériumot használunk.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Ahol az első egyenlőtlenségnél a számlálót növeltük, a másodiknál pedig a nevezőt csökkentettük. Mindkét esetben nőtt az összegezendő törtek értéke és még így is véges az összeg, tehát eredetileg sem lehetett végtelen.

## Hányados kritérium

**Tétel.** Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor. Ekkor ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens lesz,} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

Ha a határérték éppen $1$, akkor a kritérium segítségével nem tudjuk a sor konvergenciáját eldönteni.

**Példa.** Vizsgáljuk az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

ezért a sor konvergens lesz, bár a sorösszeget nem tudjuk kiszámítani.

# Gyökkritérium

**Tétel**. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor. Ekkor ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens lesz,} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

Megjegyzés: Ha $a_n$ nem nemnegatív tagú sor, akkor $|a_n|$-et kell vizsgálni!

**Példa.** Vizsgáljuk az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor konvergenciáját.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ezért a sor konvergens lesz, bár a sorösszeget nem tudjuk kiszámítani.

# Gyök- és Hányados kritérium

A két tétel szerkezete nagyon hasonló, így két kritérium egyszerre működik, vagy nem működik ha a határérték éppen $1$.

Bizonyításuk is nagyon hasonló.

Ha egy adott feladatnál az egyik kritérium nem adott eredményt, akkor nem érdemes a másikkal próbálkozni, mert az is 1-et fog adni (ilyenkor más típusú kritériumot kell majd használnunk, pl. minoráns, majoráns). Ezért csupán kényelmi kérdés, hogy egy konkrét feladatnál melyik kritériumot érdemes használni.

## Abszolút- és feltételes konvergencia

**Definíció.** A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **abszolút konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens.

**Tétel.** Minden abszolút konvergens sor konvergens is. (Nem biz.)

**Definíció.** A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **feltételesen konvergens**, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, ezért feltételesen konvergens.

**Példa.** Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^3}}$ sor konvergenciáját.

Mivel nem pozitív tagú sor, ezért először az abszolútértékek sorát vizsgáljuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n^3}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n^3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}},$$

ami egy konvergens majoráns sor, hiszen $p = \frac{3}{2} > 1$ kitevőjű hiperharmónikus sor. Tehát a sor abszolút sora konvergens, így a sor abszolút konvergens (és egyben konvergens is).