Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

20. előđás:
Függvénysorozatok. Függvénysorok.

Bevezetés – Függvénysorozatok

Definíció Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$ egy közös értelmezési tartománya az

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

függvények egy (végtelen) sorozatának. Az ilyen $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ sorozatot **függvénysorozatnak** nevezzük.

Amennyiben x helyére az x_0 pontot helyettesítjük, az

$$f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$$

numerikus sorozatot kapjuk.

Definíció. Az $\{f_n(x)\}\,,\quad x \in D \subseteq \mathbb{R}$ függvénysorozat **konvergens** az $x_0 \in D$ pontban, ha az

$$f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$$

numerikus sorozat konvergál.

Definíció. Az $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\,,\ x \in D \subseteq \mathbb{R}$ függvénysorozat **konvergencia tartománya** az a $K \subseteq D$ halmaz, mely tartalmazza az összes olyan $x_0 \in D$ pontot, melyben a függvénysorozat konvergens.

Függvénysorozatok határfüggvénye

Definíció. Az $\{f_n(x)\}$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ függvénysorozat **határfüggvénye** az az $f : K \to \mathbb{R}$ függvény, mely minden $x \in K$ konvergencatartományban lévő ponthoz $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határértéket rendeli. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ függvénysorozat pontonként konvergál f-hez a K halmazon.

Példa.

Legyen $f_n(x) = x^n$, ahol $D = \mathbb{R}$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-1,1), \\ 1, & \text{ha } x = 1, \\ \infty, & \text{ha } x > 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } x \leq -1. \end{cases}$

Definíció. (Függvénysorozat egyenletes konvergenciája) Az $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az f határfüggvényhez a $K \subseteq D$ halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik N_ε küszöbindex, melytől kezdve minden nN_ε és minden $x \in K$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Egyenletes konvergenciánál N_ε küszöbindex csak ε-tól függ, x-től nem.

Függvénysorok

Definíció. Az $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ függvénysorozat tagjait összegezve a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

formális végtelen összeget, **függvénysort** kapunk. Amennyiben a feladat nem adja meg, a függvénysor értelmezési tartománya nem más, mint az $f_n(x)$ függvények lehetséges legbővebb közös értelmezési tartománya, jelölése D.

Minden konkrét $x_0 \in D$ értékre a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ egy numerikus sor. Ekkor az

$$s_k(x) := \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$$

függvények a függvénysor k-**adik részletösszeg-függvény**ei.

Példa. Legyen $f_n(x) = x^n$, ahol $D = \mathbb{R}$, ekkor $s_k(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$. Például $x = 2$-re

$$s_k(2) = 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) = 2 \cdot \frac{1 - 2^k}{1 - 2}.$$

Függvénysorok konvergenciatartománya

Definíció. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysorra a részletösszeg függvények sorozata konvergál egy $K \subseteq D$ halmaz minden $x \in K$ pontjában, azaz létezik

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x), \quad \forall x \in K,$$

akkor a függvénysor a K halmazon pontonként konvergens. Ekkor K a függvénysorozat **konvergenciatartománya**.

Példa. Legyen $f_n(x) = x^n$, ahol $D = \mathbb{R}$, ekkor $s_k(x) = x+x^2+x^3+\cdots+x^k$. A geometriai sorra vonatkozó ismereteink alapján

$$\lim_{n\to\infty} s_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & \text{ha } x \in (-1,1), \\ \infty, & \text{ha } x \geq 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } x \leq -1. \end{cases}$$

Ezért a függvénysor konvergenciatartománya: $K = (-1,1)$.

Aboszlút konvergens függvénysorok, Weierstrass-kritérium

Definíció. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysorra a részletösszeg függvények sorozata egyenletesen konvergens egy $K \subseteq D$ halmaz minden $x \in K$ pontjában, akkor a függvénysor a K halmazon **egyenletesen konvergens**.

Tétel. (Weierstrass-kritérium) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysorra, mely D-n definiált, igaz, hogy

$$|f_n(x)| \leq a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ és bármely } x \in K \subseteq D$$

pontok esetén, továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a függvénysor **abszolút és egyenletesen konvergens** a K halmazon.

Példa. Legyen $f_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{n^2}$, ekkor a közös értelmezési tartomány $D = \mathbb{R}$, továbbá

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \left|\frac{\sin(x)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tudjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, így a függvénysor $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(x)}{n^2}$ abszolút és egyenletesen konvergens a valós számok halmazán, azaz $K = \mathbb{R}$-en.

Definício. Azokat a függvénysorokat, melyek

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

alakúak, **hatványsor**nak nevezzük. Az x_0 a hatványsor **középpontja/kifejtési pontja** és a_n az együtthatósorozat. Ilyenkor a függvénysort x_0 **körüli hatványsornak** mondjuk. A hatványsorok értelmezési tartománya a teljes valós számok halmaza $D = \mathbb{R}$.

Példa. Hol lesz konvergens a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}(x-3)^n$ hatványsor? Minden rögzített x-re vegyük a sor abszolútértékét, és alkalmazzuk a gyökkritériumot

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \cdot 2^n}} \sqrt[n]{|x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} |x-3| = \frac{|x-3|}{1 \cdot 2} < 1, \text{ ha}$$

$$|x-3| < 2, \text{ azaz } -2 < x - 3 < 2, \qquad x \in (1,5).$$

Hatványsor konvergenciatartománya

Kérdés: Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz általában a hatványsor konvergens?

- Ha $x = x_0$, akkor biztosan konvergens.
- Ha x értékét rögzítjük, akkor a sor abszolút értékére alkalmazható a gyökkritérium vagy a hányadoskritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \text{ vagy}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

itt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \varrho \geq 0$ mindig ugyanaz a szám, vagy ∞.

Azaz

$$|x-x_0| < \begin{cases} R = \infty, & \text{ha } \varrho = 0, \\ R = \dfrac{1}{\varrho}, & \text{ha } \varrho \in \mathbb{R}^+, \\ R = 0, & \text{ha } \varrho = \infty, \end{cases}$$

esetén konvergál. Tehát egy x_0 középpontú R sugarú intervallumon biztosan konvergál, és az intervallum határán túl biztosan divergens a sor. (Ha $R = 0$, akkor csak x_0-ban, ha $R = \infty$, akkor $\mathbb{R}$-en.) R-et a hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük. Az intervallum határpontjain azonban külön kell a konvergenciát megvizsgálnunk.

Cauchy-Hadamard-tétel

Tétel. (Cauchy-Hadamard) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor esetén a következő esetek valamelyike áll fenn:

- Létezik egy $R > 0$ szám, hogy a hatványsor minden olyan x elemre abszolút konvergens, melyre $|x - x_0| < R$, és minden olyan x elemre divergens, melyre $|x - x_0| > R$. Az $x = x_0 \pm R$ a tétel nem mond semmit, ez a két kiemelt pont mindig külön vizsgálatot igényel.
- A hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens. Ilyenkor $R = \infty$.
- A hatványsor csak $x = x_0$-ban konvergens, azaz $R = 0$.

A tétel következménye, hogy a hatványsor konvergenciatartománya egy intervallum, melynek középpontja x_0, hossza pedig $2R$. A végpontokban külön meg kell vizsgálni a konvergenciát a gyök-és hányadoskritériumokban lévő $\lim = 1$ esetén fellépő bizonytalanság miatt. Ez két numerikus sor vizsgálat, ahol már nem használható a fenti két kritérium.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n}$ sor konvergenciáját.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n}$ sor konvergenciáját.

Leolvasható a hatványsor középpontja $x_0 = 3$.

Az együtthatók sorozata $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$, ami $n = 0$ esetén nem definiált.

Első lépésként állapítsuk meg a konvergenciasugarat gyökkritériummal

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad R = 2.$$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $(3-2, 3+2) = (1,5)$ intervallumon belül konvergens, míg az $[1,5]$ intervallumon kívül divergens a sor.

Ha

- $x = 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,
  ami Leibniz típusú sor, konvergens, az 1 benne van a konv.tartományban.
- $x = 5$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
  ami a harmonikus sor, divergens, az 5 nincs benne a konv.tartományban.

Tehát a fenti sor konvergens, ha $x \in [1,5)$.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

A sorrol leolvasható, hogy $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$ és $x_0 = 0$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadoskritériumot

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^2}{(n+1)^2} = 3, \quad \text{így} = \frac{1}{3}.$$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ intervallumon belül konvergens, míg az $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ intervallumon kívül divergens. Ha $x = \pm\dfrac{1}{3}$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} \left(\pm\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2},$$

de ez a sor abszolút konvergens, így a $\pm\frac{1}{3}$ benne van a konvergenciatartományban.

Tehát a fenti sor konvergens, ha $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

Átalakítva

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}(x-3)^n$$

látszik, hogy $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ és $x_0 = 3$.

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-2)}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Mivel a konvergenciasugár végtelen, ezért ez a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

Hatványsor deriválása és integrálása

Tétel. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának belsejében a tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$$

hatványsor is konvergens ugyanazon az intervallumon és $f'(x)$-el egyezik meg.

Tétel. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának bármely belső $[a, b]$ intervallumában tagonként integrálható, azaz

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left[(x-x_0)^{n+1}\right]_a^b .$$