

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**21. előadás:
Hatványsorok. Taylor-sorok.**

Hatványsor deriválása és integrálása

Tétel. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának belsejében a tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$$

hatványsor is konvergens ugyanazon az intervallumon és $f'(x)$ -el egyezik meg.

Tétel. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának bármely belső $[a, b]$ intervallumában tagonként integrálható, azaz

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} [(x-x_0)^{n+1}]_a^b.$$

Függvényből hatványsor

Egy adott függvény felítható hatványsor alakban a Taylor-polinomok "ki-terjesztésével". Keressük $p(x) = a_n(x - x_0)^n + \dots + a_1(x - x_0) + a_0$ polinomot, illetve annak a_0, a_1, \dots, a_n együtthatóit, úgy hogy

$$p(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), p''(x_0) = f''(x_0), \dots, p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$	$p(x_0) = a_0$	$a_0 := f(x_0)$
$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$	$p'(x_0) = a_1$	$a_1 := f'(x_0)$
$p''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots$	$p''(x_0) = 2a_2$	$a_2 := \frac{f''(x_0)}{2}$
$p'''(x) = 6a_3 + \dots$	$p'''(x_0) = 6a_3$	$a_3 := \frac{f'''(x_0)}{6}$
\vdots	\vdots	\vdots
$p^{(n)}(x) = \dots$	$p^{(n)}(x_0) = n!a_n$	$a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Definíció: Az f függvény n -ed rendű Taylor-polinomja az $x_0 \in D_f$ helyen, ha ott a függvény legalább n -szer deriválható:

$$T_{f,x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Példa

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0, \text{ akkor}$$

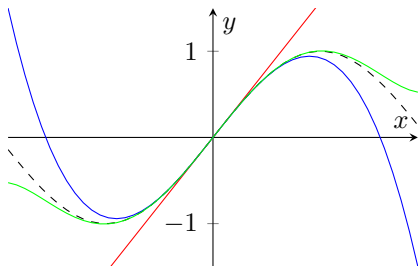
$$T_{\sin,0}^1(x) = \cos(0)(x-0) + 0 = x, \quad (\text{érintő})$$

$$T_{\sin,0}^2(x) = \frac{-\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = 0 \cdot x^2 + x + 0 = x,$$

$$\begin{aligned} T_{\sin,0}^3(x) &= \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 - \frac{\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = \\ &= -\frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0, \end{aligned}$$

$$T_{\sin,0}^4(x) = T_{\sin,0}^3(x),$$

$$T_{\sin,0}^5(x) = \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + x \quad \text{stb.}$$



Maclaurin-sor, Taylor-sor

Definíció. Legyen az $f(x)$ függvény az $x_0 \in D_f$ egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ **Taylor-során** a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

függvénysort értjük. Ha $x_0 = 0$, akkor a sor a függvény **Maclaurin-sora**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

A Taylor-sor felírása után ellenőrizzük, hogy a hatványsor konvergens-e és előállítja-e a megadott függvényt, mint határfüggvényt!

Példa

Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaren-sorát.

Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Ebből felírható, hogy a Maclaren-sor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1 \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}.$$

A hatványsor minden pontban konvergál, előállítja a függvény értékét, így

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots, \quad e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.76666$$

Írjuk fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény Maclaren-sorát.

Vizsgáljuk az első néhány deriváltat:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Látható, hogy inentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclaren-sor:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Ennek a hatványsornak is a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, és elő is állítja a függvényt.

Írjuk fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény Maclaren-sorát.

Vizsgáljuk az első néhány deriváltat:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x), & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin(x) & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos(x) & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Látható, hogy inentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclaren-sor:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, és elő is állítja a függvényt.

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény Maclauren-sorát.

A deriváltak vizsgálata nélkül tudjuk, hogy

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1,$$

Mivel minden függvényhez csak egy Maclauren-sor tartozhat, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

hatványsor lesz a függvény Maclauren-sora.

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara 1, és $x \in (-1, 1)$ -re lesz csak konvergens a sor, azaz csak itt állítja elő a függvényt.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Alapfüggvények Maclauren-sora

$$\bullet e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \forall x \in (-1, 1)$$

Taylor-és Maclauren-sorba fejtés

A megadott függvény adott pont körüli sorfejtéséhez a deriváltak vizsgálata helyett az alábbi technikákat használjuk:

- Átalakítás: algebrai átalakításokkal és/vagy a változók helyettesítésével visszavezetjük a megadott függvényt valamilyen ismert alapfüggvényre.
- Tagonkénti deriválás, integrálás: a megadott függvény deriváltja vagy integrálja valamilyen alapfüggvény, vagy arra algebrailag visszavezethető függvény, majd sorbafejtés után visszaintegráljuk/deriváljuk.

Minden sorfejtéshez hozzátartozik a konvergenciaintervallum megállapítása is, melyet az alapfüggvény konvergenciaintervallumából vezetünk le.

Példák

Fejtsük sorba az alábbi függvényeket az $x_0 = 0$ körül:

a) $f(x) = e^{3x}$ - az e^x Maclaurin-sorába $x = 3x$ -t helyettesítve

$$e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8} + \dots,$$

ahol $3x \in \mathbb{R}$ esetén a sor konvergens, tehát $x \in \mathbb{R}$ esetén is az.

b) $g(x) = \cos(x^2)$ - a $\cos(x)$ Maclaurin-sorába $x = x^2$ -t helyettesítve

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \dots,$$

ahol $x^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, tehát minden valós számra konvergens.

c) $h(x) = \frac{1}{4+3x} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \left(\frac{-3x}{4}\right)}$ - a geometriai sorba $\frac{-3x}{4}$ -t írva

$$\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3x}{4}\right)^n = \frac{1}{4} - \frac{3x}{16} + \frac{9x^2}{64} - \dots = \frac{1}{4+3x}, \text{ ha}$$

$$\left| \frac{-3x}{4} \right| < 1, \text{ akkor } |x| < \frac{4}{3}, \text{ azaz } x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Fejtsük sorba az alábbi függvényeket az $x_0 = 0$ körül:

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x^2}{4+x} &= \frac{x^2}{4} \frac{1}{1+\frac{x}{4}} = \frac{x^2}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{n+2}, \end{aligned}$$

VAGY

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4+x} &= x - 4 + \frac{4}{1-\frac{x}{4}} = x - 4 + 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \\ &= x - 4 + 4 - x + 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{n+2}, \end{aligned}$$

ha $\left|-\frac{x}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$, azaz $x \in (-4, 4)$.

Példa

Fejtsük sorba az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt a 0 körül. A sorfejtéshez a derivált függvényt fogjuk használni.

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \text{ így}$$

$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int (-1)^n x^n dx \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ha } |-x| < 1, \text{ azaz } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Sőt $x = 1$ esetén is konvergens (alternáló harmónikus sor).

Ekkor $x = 1$ -re

$$\ln(1+1) = \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

becslést adhatunk például $\ln(2)$ értékére.

Közelítések hatványsorok segítségével

Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln(2)$ -öt.

Ehhez az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ennek a sorfejtésnek a konvergenciaintervallumában benne van az 1.

Tétel. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, akkor

$$\left| S - \sum_{n=0}^N a_n \right| < |a_{N+1}|,$$

tehát a közelítés hibáját mindig az összegezett tagok után következő elem abszolút értékével lehet felülről becsülni.

Tehát az $\ln(2)$ esetében a hiba

$$\left| \ln(2) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < \left| \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} \right| = \frac{1}{N+2}.$$

Közelítések hatványsorok segítségével

Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln(2)$ -öt.

Ehhez az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ennek a sorfejtésnek a konvergenciaintervallumában benne van az 1.

Hány tagig kell elmennünk, hogy az $\ln(2)$ értékét két tizedesjegy pontossággal megközelítsük?

Válasz: Ha a hiba felső becslése $\frac{1}{N+2}$ eleget tesz a fenti feltételnek, akkor a valódi hiba is. A két tizedesjegy pontosság azt jelenti, hogy

$$\left| \ln(2) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < 10^{-2}, \text{ amiből } \frac{1}{N+2} < 10^{-2}, \text{ azaz } N > 98.$$

Példa

Fejtsük sorba az $f(x) = \arctan(x)$ függvényt a 0 körül. A sorfejtéshez a derivált függvényt fogjuk használni.

$$f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int (-1)^n x^{2n} dx \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{ha } |-x^2| < 1, \text{ azaz } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Igazából $x = 1$ -re visszkapjuk a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ sort, ami Leibniz-sor, tehát konvergens, ezért a sor konvergens, ha $x = 1$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \quad \text{ahol a hiba} < \frac{1}{9}.$$

Lagrange maradéktag

Definíció. Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább N -szer differenciálható, ekkor $f(x)$ N -edfokú **Taylor-polinomján** a

$$T_{f, x_0}^N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

polinomot értjük.

Tétel. Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább $N + 1$ -szer differenciálható, ekkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!} (x-x_0)^{N+1} = T_{f, x_0}^N(x) + L_{f, x_0}^N(t),$$

ahol $t \in (x_0, x)$ (vagy esetleg (x, x_0)) és $L_{f, x_0}^N(t)$ az úgynevezett **Lagrange-féle maradéktag**.

Közelítés Taylor-polinommal

Az előző tétel értelmében tehát egy adott szám közelítéséhez használhatjuk a Taylor-polinomot és a hiba felülről becsülhető a Lagrange-féle maradékkal.

Közelítsük e értékét 3 tizedesjegy pontossággal. ($e \approx 2.71828$)

Használjuk az $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 0-körüli Taylor sorból az első N tagot és helyettesítsük be az x helyére az 1-et, ekkor

$$e \approx \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}, \quad \text{és a hiba } |e - T_{e^x, 0}^N(1)| = |L_{e^x, 0}^N(t)|, \quad \text{ahol } t \in (0, 1).$$

Becsüljük a hibát, ha $t \in (0, 1)$

$$|L_{e^x, 0}^N(t)| = \left| \frac{(e^x)^{(N+1)}(t)}{(N+1)!} (1-0)^{N+1} \right| = \frac{e^t}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!} < 10^{-3},$$

az $(N+1)! > 3000$ már $N = 6$ -ra igaz ($7! = 5040$). Tehát

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,71805.$$