

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2024.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

Ismétlés: Integrálási technikák

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int f(x) - g(x) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \quad c \in \mathbb{R}$$

A deriválási szabályok megfordításából következnek.

Elemi függvények integráljai – táblázat

f	$\int f \, dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c \quad x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
e^x	$e^x + c$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + c$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin}(x) + c \quad x < 1$

Példák – Alapfüggvények

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx =$$

Példák – Alapfüggvények

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

Példák – Alapfüggvények

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx =$$

Példák – Alapfüggvények

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

Példák – Alapfüggvények

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\int 3 \sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \, dx =$$

Példák – Alapfüggvények

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\begin{aligned} \int 3 \sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \, dx &= 3 \int \sin(x) \, dx + \sqrt{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= -3 \cos(x) + \sqrt{2} \operatorname{arsh}(x) + c \end{aligned}$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx =$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx = \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx =$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2 + 6)^3} + c\end{aligned}$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2 + 6)^3} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx =$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2 + 6)^3} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \int (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2 + 6)^3} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \int (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(x)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2\sqrt{\ln(x)} + c$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2+6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2+6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2+6)^3} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \int (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(x)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2\sqrt{\ln(x)} + c$$

$$\int x^3 \sin(1+x^4) dx =$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2 + 6)^3} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \int (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(x)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2\sqrt{\ln(x)} + c$$

$$\int x^3 \sin(1 + x^4) dx = \frac{1}{4} \int \sin(1 + x^4) 4x^3 dx =$$

Példák – Egyszerű helyettesítés (megfordított lácszabály)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 6}} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6}} 10x dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 6)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{(5x^2 + 6)^3} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \int (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(x)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2\sqrt{\ln(x)} + c$$

$$\int x^3 \sin(1 + x^4) dx = \frac{1}{4} \int \sin(1 + x^4) 4x^3 dx = -\frac{1}{4} \cos(1 + x^4) + c$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\int x^2 e^{-x} dx =$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\int x^2 e^{-x} dx = x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx =$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx =\end{aligned}$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$\int \ln(2x) dx =$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$\int \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{1}{2x} 2 dx = x \ln(2x) - x + c$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$\int \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{1}{2x} 2 dx = x \ln(2x) - x + c$$

$$\int (x^2 + 1) \cos(2x) dx =$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$\int \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{1}{2x} 2 dx = x \ln(2x) - x + c$$

$$\int (x^2 + 1) \cos(2x) dx = (x^2 + 1) \frac{\sin(2x)}{2} - \int 2x \frac{\sin(2x)}{2} dx =$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$\int \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{1}{2x} 2 dx = x \ln(2x) - x + c$$

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1) \cos(2x) dx &= (x^2 + 1) \frac{\sin(2x)}{2} - \int 2x \frac{\sin(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \sin(2x) - x \left(\frac{-\cos(2x)}{2} \right) + \int \frac{-\cos(2x)}{2} dx =\end{aligned}$$

Példák – Parciális integrálás (megfordított szorzatszabály)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

$$\int \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{1}{2x} 2 dx = x \ln(2x) - x + c$$

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1) \cos(2x) dx &= (x^2 + 1) \frac{\sin(2x)}{2} - \int 2x \frac{\sin(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \sin(2x) - x \left(\frac{-\cos(2x)}{2} \right) + \int \frac{-\cos(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \sin(2x) + \frac{x}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + c\end{aligned}$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 8} dx =$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix}$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3 + 2x}{x+1} dx =$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3+2x}{x+1} dx = \int x^2 - x + 3 - \frac{3}{x+1} dx =$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x+1} dx &= \int x^2 - x + 3 - \frac{3}{x+1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3 \ln|x+1| + c\end{aligned}$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x+1} dx &= \int x^2 - x + 3 - \frac{3}{x+1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3 \ln|x+1| + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+4} dx =$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x+1} dx &= \int x^2 - x + 3 - \frac{3}{x+1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3 \ln|x+1| + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \frac{3}{4} \cdot 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \frac{1}{2} dx =$$

Példák – Parciális törtekre bontás

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x-8} dx &= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx \quad \begin{matrix} A+B=1, \\ 2A-4B=1 \end{matrix} \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{1}{x-4} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{6} \ln|x-4| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x+1} dx &= \int x^2 - x + 3 - \frac{3}{x+1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3 \ln|x+1| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \frac{3}{4} \cdot 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \frac{1}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c\end{aligned}$$