

1. Gyakorlat

Improprius integrálok

F1. (Impr.Integrál 1.típus) Számítsuk ki az alábbi első típusú improprius integrálokat:

$$(a) \int_3^{\infty} \frac{1}{(1-x)^3} dx, \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{6}{x^2+x-2} dx, \quad (c) \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx.$$

F2. (Impr.Integrál 2.típus) Számítsuk ki az alábbi második típusú improprius integrálokat:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^4}} dx, \quad (b) \int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}} dx, \quad (c) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

F3. Legyen $f_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ $x \in [0, \infty)$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Szemléltessük az f_λ függvényt $\lambda = 1$ és $\lambda = 2$ esetén, és mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0, \infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz

$$\int_0^{\infty} f_\lambda(x) dx = 1 \quad \text{minden } \lambda > 0 \text{ számra.}$$

F4. (Hf.) Számítsuk ki az improprius integrálokat:

$$(a) \int_4^{\infty} \frac{2}{(3x-1)^2} dx, \quad (b) \int_2^{\infty} e^{-5x} dx, \quad (c) \int_1^5 \frac{3}{\sqrt[4]{x-1}} dx.$$

Opcionális(ha marad idő)

F5. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b] \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases}$$

Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$