1. Gyakorlat – Megoldások
Improprius integrálok

F1. (Impr.Integrál 1.típus) Számítsuk ki az alábbi első típusú improprius integrálokat:

$$\text{(a)} \int_3^\infty \frac{1}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int_0^\infty xe^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás [F1].

(a) A végtelenig való integrálást határértékként írjuk fel:

$$\int_3^\infty \frac{1}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_3^c (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{(1-x)^{-2}}{-2}\right]_3^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{(1-c)^{-2}}{2} - \frac{(1-3)^{-2}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

(b) Először az integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, így

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A, B együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$6 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$6 = (A+B)x + 2A - B,$$

amiből $A+B=0$, és $2A-B=6$. Ebből $A=2, B=-2$, és így

$$\int \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_2^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} 2\ln\left|\frac{c-1}{c+2}\right| - 2\ln\left|\frac{2-1}{2+2}\right| = \; = -2\ln\left(\frac{1}{4}\right) = 4\ln 2 \approx 2,77,$$

mert

$$\lim_{c\to\infty}\frac{c-1}{c+2} = \lim_{c\to\infty}\frac{1-\frac{1}{c}}{1+\frac{2}{c}} = 1.$$

(c) Először az integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\int_0^\infty xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^c =$$
$$= \lim_{c\to\infty} -\frac{ce^{-2c}}{2} - \frac{e^{-2c}}{4} - \left(-\frac{0e^{-2\cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2\cdot 0}}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

a L'Hospital-szabály alkalmazásával.

F2. (Impr.Integrál 2.típus) Számítsuk ki az alábbi második típusú improprius integrálokat:

$$(a)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}\,\mathrm{d}x, \qquad (b)\ \int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}}\,\mathrm{d}x, \qquad (c)\ \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás [F2].

(a) A függvény 1-ben nem korlátos, így ott közelítjük:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}\cdot(-1)}\right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{3}{\sqrt[3]{1-x}}\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{3}{\sqrt[3]{\varepsilon}} - \frac{3}{\sqrt[3]{1}} = \frac{3}{0+} - 3 = \infty.$$

Az integrál divergens, mert a határérték nem létezik.

(b) Itt a -2-ben van „probléma”:

$$\int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-2+\varepsilon}^0 6(4+2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{6(4+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right]_{-2+\varepsilon}^0 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} 6(4+2\cdot 0)^{\frac{1}{2}} - 6(4+2(-2+\varepsilon))^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 6\sqrt{4} - 6\sqrt{2\varepsilon} = 12.$$

(c) Először integrálást végezzük el,alapfüggvény integráljára vezetjük vissza a feladatot, majd egyszerű helyettesítést alkalmazunk:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ennek ismeretében az improprius integrál (a függvény a 2-ben tart a végtelenhez):

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}.$$

F3. Legyen $f_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad (x \in [0,\infty))$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Szemléltessük az f_λ függvényt $\lambda = 1$ és $\lambda = 2$ esetén, és mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0,\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz

$$\int_0^\infty f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{minden } \lambda > 0 \text{ számra.}$$

Megoldás [F3]. Deriválással kapjuk, hogy pozitív λ esetén f_λ konkáv. Továbbá igaz, hogy $f_\lambda(0) = \lambda$, és $\lim\limits_{x\to\infty} f_\lambda = 0$. Ezek alapján ábrázolhatjuk a függvényeket még azt is felhasználva, hogy nagyobb λ esetén f_λ gyorsabban tart a 0-hoz.
Az improprius integrál:

$$\int_0^\infty f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^c = \lim_{c\to\infty} -e^{-\lambda c} - \left(-e^{-\lambda 0}\right) = 1.$$

F4. (Hf.) Számítsuk ki az improprius integrálokat:

$$(a)\quad \int_4^\infty \frac{2}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad (b)\quad \int_2^\infty e^{-5x}\,\mathrm{d}x, \qquad (c)\quad \int_1^5 \frac{3}{\sqrt[4]{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás [F4]. (a) $\dfrac{2}{33}$ $\qquad (b)$ $\dfrac{1}{5e^{10}}$ $\qquad (c)$ $\sqrt{128}$