3. Gyakorlat – Megoldások
Vektorok és koordinátageometria

F1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

Megoldás [F1]. A skaláris szorzatuk: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$.
A hajlásszöget a skaláris szorzatból és a vektorok hosszából számolhatjuk:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}, \qquad |\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{26} \cdot 3}\right) \approx 54^\circ.$$

F2. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

Megoldás [F2]. A párhuzamos komponens az előadáson tanult formulával:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} = \frac{8}{10}(3, 1, 0) = (2.4, 0.8, 0).$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (3, -1, 5) - (2.4, 0.8, 0) = (0.6, -1.8, 5).$$

F3. (Hf.) Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, 5, 7)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

Megoldás [F3]. $\mathbf{v}_{||} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_\perp = (2, 3, 8)$

F4. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát.

Megoldás [F4].
$(1, 3, -2) \times (-1, 2, 0) = (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2, (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 0, 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = (4, 2, 5).$

F5. Számítsuk ki az $A(-1, 0, 2), B(2, 1, 0), C(3, 2, 1)$ csúcspontú háromszög területét.

Megoldás [F5]. Legyen $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (3, 1, -2)$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (4, 2, -1)$. Az ABC háromszög területe fele a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített paralelogramma területének. Utóbbi pontosan a $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (3, -5, 2)$ vektor hossza, ami $\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$. Így a háromszög területe $\frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3,08$.

F6. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$ vektorok $[\mathbf{abc}]$ vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

Megoldás [F6]. $[\mathbf{abc}] = 2 \cdot 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \cdot 2 = = 0 + 0 - 10 - 0 + 3 - 16 = -23$. Az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata ennek abszolút értéke, azaz 23.

F7. Írjuk fel a $P_0(1, 2, 4)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$ normálvektorú sík egyenletét.

Megoldás [F7]. Az $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenlete $2x + y + 3z = c$, ahol a c konstans úgy határozzuk meg, hogy a P_0 pont rajta legyen a síkon. Azaz $c = 2 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 4 =$ $= 16$, így a kérdéses sík egyenlete $2x + y + 3z = 16$.

F8. Írjuk fel a $P(3, 4, 6)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(-1, 5, 4)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

Megoldás [F8]. A sík egyenlete az előző feladathoz hasonlóan: $x - 2y + z = 1$. Ennek a Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{x - 2y + z - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 0.$$

A Q pontnak ettől a síktól való távolságát a hasonló formulából számolhatjuk:

$$\left| \frac{-1 - 2 \cdot 5 + 4 - 1}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{6}} \right| = \frac{8}{\sqrt{6}} \approx 3,27.$$

F9. (Hf.) Írjuk fel a $P(3, -1, 2)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2, 3, -4)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(0, 3, 1)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

Megoldás [F9]. Sík egyenlete: $2x + 3y - 4z = -5$. Pont távolsága: $\frac{10}{\sqrt{29}} \approx 1,86$.

F10. Írjuk fel a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ és $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 3)$ vektorokkal párhuzamos, a $P(2, 3, 7)$ ponton átmenő sík egyenletét.

Megoldás [F10]. Mivel a vektoriális szorzat a két tényezőre merőleges vektor, így ezen sík egy normálvektora a $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (10, -5, 0)$ vektor. Így a sík egyenlete $10x - 5y = 5$, amivel ekvivalens, hogy $2x - y = 1$.

F11. Mutassuk meg, hogy a $3x + y - z = 1$ és a $6x + 2y - 2z = 1$ egyenletű síkok párhuzamosak, és határozzuk meg a két sík távolságát.

Megoldás [F11]. F11 Az első sík normálvektora $\mathbf{n}_1 = (3, 1, -1)$, míg a másodiké $\mathbf{n}_2 = (6, 2, -2)$. Látható, hogy $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$, azaz a két sík valóban párhuzamos. A két sík távolságának a kiszámításához válasszunk egy Q pontot az első síkról. Legyen mondjuk $Q(0, 1, 0)$, mert ez rajta van a síkon, kielégíti az egyenletet: $3 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$. A két párhuzamos sík távolsága a Q pont távolsága a második síktól, ami

$$\left| \frac{6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{44}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{11}} \approx 0,151.$$