# 4. Gyakorlat
# Lineáris összefüggőség, bázis, altér, dimenzió, mátrixok műveletei

**F1.** Döntsük el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy sem:

$$a)\quad \left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}; \qquad b)\quad \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}\right\}.$$

**F2.** Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is! Végezzünk el a $\mathbf{D}^T\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}^T\mathbf{D}$ szorzásokat, mit mondhatunk az eredményekről?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 0 & -2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

**F3. (Hf)** Adva van

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\1 & 4 & 3\\3 & 2 & 5\end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixműveletek eredményét, ha lehetséges:

$\mathbf{A}{+}3\mathbf{v}$, $\mathbf{A}{-}\mathbf{B}$, $\mathbf{v}^T{\cdot}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{v}^T$, $\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{A}$, $3\mathbf{v}^T{\cdot}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}{\cdot}\mathbf{B}$, $\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{v}$, $\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{C}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^4$.

**F4.** Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő.

Az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 5 & 2\\2 & 1 & 3 & 0\\5 & 6 & 2 & 4\end{pmatrix}$ mátrix $a_{ij}$ eleme jelentse az $i$-edik gyárban egy nap alatt előállított $j$-edik termék számát.

A $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}40\\60\\50\\20\end{pmatrix}$ vektor $j$-edik komponense a $j$-edik termék egységára.

($a$) Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?

($b$) Mi az $\mathbf{Ae_i}$ szorzat eredménye, ahol $\mathbf{e_i}$ az $\mathbb{R}^4$ vektortér természetes bázisának $i$-edik egységvektora? Mit jelent az eredmény?

($c$) Mik lesznek a komponensei az $\mathbf{1^TA}$ szorzat eredményvektorának, ahol $\mathbf{1}$ az a vektor, melyre a szorzás végrehajtható, és minden koordinátája 1? Mi az eredmény jelentése?

($d$) Írjuk fel mátrixszorzás segítségével a gyárakra az általuk termelt termékek összmennyiségét!

**F5. (Hf)** Egy kereskedelmi cég $n$ féle terméket forgalmaz $m$ boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix $a_{ij}$ eleme jelentse a $j$-edik termék $i$-edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor $p_j$ komponense jelölje az $j$-edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a természetes bázis vektorai), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel mátrixműveletként, és számítsuk ki:

($a$) a havi bevételt boltonként;

($b$) az $i$-edik bolt havi bevételét;

($c$) az $i$-edik boltban a $j$-edik áruból eladott mennyiséget;

($d$) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

($e$) a havi összbevételt.

## Opcionális(ha marad idő)

**F6.** Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ tér

$$\mathbf{a} = \big(1,\, 3,\, 4\big), \qquad \mathbf{b} = \big(2,\, 7,\, 2\big), \qquad \mathbf{c} = \big(-1,\, 2,\, 1\big)$$

vektorait. Döntsük el, hogy az $\mathbf{x} = \big(-3,\, 1,\, -2\big)$ lineárisan összefüggő-e az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorokkal, és fejezzük ki a kombinációjukként, ha lehetséges!

**F7.** Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^3$ térben az

$$\mathcal{M} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; 3x - 2y = 4z\Big\}$$

részhalmaza egy altér. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát.

**F8.** Határozzuk meg mindazon $\mathbf{B}$ mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetőek a mátrixszorzás műveletére nézve.