4. Gyakorlat - Megoldások
Lineáris összefüggőség, bázis, altér, dimenzió, mátrixok műveletei

F1. Döntsük el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy sem:

$$a)\quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}; \qquad b)\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Megoldás [F1]. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

(a) Az egyenlet,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1$, melyet a másik két egyenletbe írva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első (-3)-szorosa, nem ad új információt. Ennek egy (nem nulla) megoldása például a $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -1$. Ekkor $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3$. Ellenőrizhető, hogy ez az eredeti egyenletrendszer megoldása is, azaz

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mely mutatja, hogy ezen vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz lineárisan összefüggőek.

(b)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből az első egyenlet kétszeresét kivonva kapjuk, hogy $-\lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$. A második egyenletből $2\lambda_3 = 0$, azaz $\lambda_3 = 0$. Ekkor az első egyenletet felhasználva kapjuk, hogy $\lambda_1 = 0$. Tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

F2. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is! Végezzünk el a $\mathbf{D}^T\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}^T\mathbf{D}$ szorzásokat, mit mondhatunk az eredményekről?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F2]. Az $m \times l$-es és az $n \times k$-as mátrixokat pontosan akkor tudjuk összeszorozni, ha $l = n$. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix 2×2-es, a $\mathbf{B}$ 3×2-es, a $\mathbf{C}$ 2×3-as, és a $\mathbf{D}$ 3×1-es, így az $\mathbf{AC}, \mathbf{BA}, \mathbf{BC}, \mathbf{CB}, \mathbf{CD}$ szorzatok értelmesek. Ezek eredménye:

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ -4 & -2 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{CB} = \begin{pmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrixok transzponáltjai:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{D}^T\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T(\mathbf{D}^T)^T = \mathbf{B}^T\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^T\mathbf{B} = (1,3).$$

F3. (Hf) Adva van

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixműveletek eredményét, ha lehetséges:

$\mathbf{A}{+}3\mathbf{v}$, $\mathbf{A}{-}\mathbf{B}$, $\mathbf{v}^T{\cdot}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{v}^T$, $\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{A}$, $3\mathbf{v}^T{\cdot}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}{\cdot}\mathbf{B}$, $\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{v}$, $\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{C}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^4$.

Megoldás [F3]. $\mathbf{A}{+}3\mathbf{v} = \text{n.é.}$, $\mathbf{A}{-}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^T{\cdot}\mathbf{v} = 50$, $\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 18 \\ 34 \\ 42 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \text{n.é.}$, $3\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B} = (9, 24, 45)$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \text{n.é.}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -12 & 40 \\ -12 & 72 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 9 \\ 15 & 25 & 27 \\ 23 & 27 & 31 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$.

F4. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő.

Az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát.

A $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$ vektor j-edik komponense a j-edik termék egységára.

(a) Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?

(b) Mi az $\mathbf{Ae_i}$ szorzat eredménye, ahol $\mathbf{e_i}$ az $\mathbb{R}^4$ vektortér természetes bázisának i-edik egységvektora? Mit jelent az eredmény?

(c) Mik lesznek a komponensei az $\mathbf{1^TA}$ szorzat eredményvektorának, ahol $\mathbf{1}$ az a vektor melyre a szorzás végrehajtható, és minden koordinátája 1? Mi az eredmény jelentése?

(d) Írjuk fel mátrixszorzás segítségével a gyárakra az általuk termelt termékek összmennyiségét!

Megoldás [F4].

(a) A $\mathbf{Ap} = \begin{pmatrix} 450 \\ 290 \\ 740 \end{pmatrix}$ mátrixszorzat eredményében az első koordináta az első gyárban a megfelelő egységárral vett termékmennyiségek szorzatainak összege, azaz az első gyár által termelt érték: $4 \cdot 40 + 0 \cdot 60 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 450$. A második koordináta hasonlóan a második gyárra vonatkozó összérték. Az $\mathbf{Ap}$ szorzat koordinátái megadják az egyes gyárak által termelt értékeket.

(b) Ha $i = 1$ $\mathbf{Ae_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopa, megadja, hogy az első termékből melyik gyár hányat gyárt egy nap alatt. Hasonlóan $i = 2, 3, 4$.

(c) $(1, 1, 1) \cdot \mathbf{A} = (11, 7, 10, 6)$, minden koordinátájában az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopelemeinek összege szerepel, azaz megadja, hogy egy nap alatt az egyes termékekből összesen mennyi készül.

(d) $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$ szorzat eredményvektorában most $\mathbf{A}$ sorösszegei szerepelnek, ami az egy gyárban egy nap alatt előállított összes termékek számát adja meg.

F5. (Hf) Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse a j-edik termék i-edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_j komponense jelölje az j-edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a természetes bázis vektorai), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel mátrixműveletként, és számítsuk ki:

(a) a havi bevételt boltonként;

(b) az i-edik bolt havi bevételét;

(c) az i-edik boltban a j-edik áruból eladott mennyiséget;

(d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

(e) a havi összbevételt.

Megoldás [F5].

(a) Az $\mathbf{Ap}$ szorzat eredményvektorának a komponensei adják meg az egyes boltok bevételeit.

(b) Ha csak az i-edik bolt bevételére vagyunk kíváncsiak, akkor az előzőt balról meg kell szorozni az $\mathbf{e}_i$ bázisvektor transzponáltjával: $\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}$.

(c) Ez pontosan az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme. Ezt a bázisvektorok segítségével a következőképpen írhatjuk fel: $\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ae}_j$.

(d) Ezt úgy kapjuk, hogy összeadjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sorait. Ezt az $\mathbf{1}$ oszlopvektor transzponáltjával való beszorzással érjük el: $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.

(e) Az előző mennyiséget kell az egységárakkal beszorozni: $(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{p}$, avagy a boltonkénti havi bevételt összegezni: $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{p})$, mely két szorzat megegyezik a mátrixszorzás asszociativitása miatt.