5. Gyakorlat - Megoldások
Determináns, inverz, mátrixegyenletek

F1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad c)\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F1]. (a) A 2×2-es determinánst az elemekből egyszerűen számolhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

(b) A 3×3-as determinánst is számolhatjuk közvetlenül:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 \cdot 4 - 5 \cdot 1) + 2((-1) \cdot 4 - 5 \cdot 1) + 3((-1) \cdot 1 - 4 \cdot 1) =$$

$$= 11 - 18 - 15 = -22.$$

Kicsit egyszerűbb, ha sortranszformáció után kifejtjük az első oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_2+s_1}}{\underset{\mathbf{s_3-s_1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 8 \cdot 3) = -22.$$

(c) Sor- és oszloptranszformációkat végzünk (determináns számolásánál sorok, oszlopok osztásánál a megfelő számmal kell szorozni a következő determinánst, illetve cserénél (-1)-gyel):

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_1}\cdot(-1)}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_2-3s_1}}{\underset{\mathbf{s_3-s_1},\ \mathbf{s_4-2s_1}}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_2 \leftrightarrow s_4}}{=}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_3+s_2}}{\underset{\mathbf{s_4+s_2}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_3}/12}{=} 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{s_4-23s_3}}{=}$$

$$= 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12 \cdot 0 = 0,$$

ahol a végén használtuk, hogy felső háromszög mátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

F2. (Hf) Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F2]. 35.

F3. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{pmatrix}$$

Megoldás [F3]. A determináns értéke

$$2(3p - 45) + 5(-p + 15) + 9(9 - 9) = 6p - 90 - 5p + 75 = p - 15.$$

Így $p = 15$ esetén lesz a determináns értéke nulla.

F4. Számítsuk ki a Gauss-Jordan módszerrel és az adjungált mátrix segítségével is az alábbi mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F4]. Gauss-Jordan módszerrel az inverz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right)$$

Adjungált segítségével

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{1 \cdot (4-4) - 1(-6-(-4))} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

F5. Határozza meg az összes olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} + 6 \cdot \mathbf{X}$$

teljesül, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -10 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F5]. Az egyenletet átrendezve

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} + 6 \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{AX} - 6\mathbf{EX} = \mathbf{B}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right) \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Az előző feladatban már kiszámítottuk az inverzet

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -10 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 4 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F6. (Hf) Határozza meg az összes olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

teljesül, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F6]. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 & -1 \\ -7/5 & 1 \\ -19/5 & 0 \end{pmatrix}.$