6. Gyakorlat - Megoldások
Rang és lineáris egyenletrendszerek

F1. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F1]. Sor- és oszloptranszformációkkal alakíthatjuk a mátrixok például így:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \overset{(-1)\cdot s_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \underset{s_3+3s_1}{\overset{s_2+2s_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{s_3-2s_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az utolsó mátrixban két "lépcső" szerepel, így a mátrix rangja 2.

F2. Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & -2 \end{array}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval.

Megoldás [F2]. Az egyenletrendszer mátrixát sortranszformációkkal alakítjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{s_3-s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3 (3 db lépcső), így egy darab egyértelmű megoldásunk van. Lentről felfelé behelyettesítve az egyenletekbe $-2z = 4$, így $z = -2$. Ezt felhasználva $(-3)y + (-2)(-2) = -2$, tehát $y = 2$. És $x + 2 + 2(-2) = -1$, ezért $x = 1$.

F3. (Hf) Oldjuk meg a fenti egyenletrendszert az együtthatómátrix invertálásával is!

Megoldás [F3].

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

azaz $x = 1, y = 2, z = -2$.

F4. Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 9y & - & 5z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval. Mi történik, ha az utolsó egyenlet jobb oldalán 0 szerepel? Van-e megoldás, ha mindhárom egyenlet jobb oldala 0?

Megoldás [F4]. Az egyenletrendszer mátrixát sortranszformációkkal alakítjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{s_3-s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -22 & 14 & -2 \\ 0 & -11 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{s_3-\frac{1}{2}s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -22 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix rangja 2 még a kibővített mátrix rangja 3, az utolsó sornak megfelelő egyenlet az elimináció végén $0 = 2$ ellentmondás, tehát az egyenletrendszernek nincsen megoldása.

Amennyiben az utolsó egyenlet jobb oldala 0.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{s_3-s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -22 & 14 & -2 \\ 0 & -11 & 7 & -1 \end{array}\right) \overset{s_3-\frac{1}{2}s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -22 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 2, tehát az egyenletrendszerben két független egyenlet szerepel és három változó. Így az egyik változót szabadon választhatjuk (végtelen sok megoldás létezik). Legyen $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor $-22y + 14z = -2$, így $y = \dfrac{2 + 14z}{22} = \dfrac{1 + 7z}{11}$, és $x + 9y - 5z = 1$, amiből $x = 1 - 9\dfrac{1 + 7z}{11} + 5z = \dfrac{11 - 9 - 63z + 55z}{11} = \dfrac{2 - 8z}{11}$. Például $z = -1$ esetén a megoldás $x = 10/11$; $y = -6/11$; $z = -1$.

Ha az egyenletrendszer homogén, azaz a jobb oldalon csupa 0 szerepel, akkor van megoldás, legalább az $x = y = z = 0$ megoldása lesz. Ilyenkor az utolsó oszlopban az eliminációban mindig 0-ák vannak, így a lépcsős alak

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -5 & 0 \\ 0 & -22 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 2, tehát az egyenletrendszerben két független egyenlet szerepel és három változó. Így az egyik változót szabadon választhatjuk. Legyen $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor $-22y + 14z = 0$, így $y = \frac{7z}{11}$, és $x + 9y - 5z = 0$, amiből $x = -9\frac{7z}{11} + 5z = \frac{-63z + 55z}{11} = \frac{-8z}{11}$. Például $z = 11$ esetén a megoldás $x = -8$; $y = 7$; $z = 11$.

F5. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 2\\
9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5\\
x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2
\end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Megoldás [F5]. Az előző feladatokhoz hasonlóan:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2\\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5\\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} s_2-9s_1\\ \sim\\ s_3-3s_1\\ s_4-s_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4\\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{s_2 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1\\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} s_3-2s_2\\ \sim\\ s_4-5s_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 18 & -30 & -9 \end{array}\right) \overset{s_4-3s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is $3 < 5$ a változók száma, ezért $5 - 3 = 2$ változó szabadon választható, legyen ez x_4 és x_5. A harmadik egyenlet szerint $x_3 = -3 - 6x_4 + 10x_5$. A második szerint $2x_2 = 1 - 2x_5 + 2x_4 + x_3 = 1 - 2x_5 + 2x_4 - 3 - 6x_4 + 10x_5 = -2 + 8x_5 - 4x_4$, ezért $x_2 = -1 + 4x_5 - 2x_4$. Az első egyenlet szerint $x_1 = 1 + x_2 + x_4 - 2x_5$, azaz $x_1 = 1 - 1 + 4x_5 - 2x_4 + x_4 - 2x_5 = 2x_5 - x_4$.