

7. Gyakorlat - Megoldások

Cramer-szabály, paraméteres lineáris egyenletrendszerek

F1. Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= -4 \\ -x + 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

Megoldás [F1]. Cramer-szabállyal abban az esetben tudunk megoldani egy lineáris egyenletrendszert, ha az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyezik, és az együttható mátrix determinánsa nem 0 (azaz egy darab egyértelmű megoldás van).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{3} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{9}{3} = 3.$$

F2. (Hf) Oldjuk meg a fenti egyenletrendszert Gauss-eliminációval és az együtthatómátrix invertálásával is!

Megoldás [F2]. $x = 2, y = -1, z = 3$

F3. Határozzuk meg a paraméter függvényében az egyenletrendszerek megoldását!

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= a \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \\ \text{(b)} \quad & \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ y + bz &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Megoldás [F3].

(a) A megszokott módon az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_1 \leftrightarrow s_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 5s_1 \end{array} \\ & \begin{array}{l} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 5s_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} s_3 - 2s_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a - 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- $a \neq 2, \text{rang}(\mathbf{A}) = 2 < \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ nincs megoldás.

- $a = 2$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < 4$ végtelen sok megoldás van (két szabad változó), ekkor a megoldáshalmaz $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, $x_2 = 1/7 - 16/7x_3 + 12/7x_4$, $x_1 = 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3/7 - 6/7x_3 + 1/7x_4$.

(b)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ (-1)s_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \end{array} \\ & \sim \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_3 - s_2 \\ \sim \\ (-1) \cdot s_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & b-4 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- $b \neq 4$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ egy darab egyértelmű megoldás van. Ez éppen a triviális megoldás lesz $x = y = z = 0$.
- $b = 4$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < 3$ végtelen sok megoldás van (egy szabad változó), ekkor a megoldáshalmaz $z \in \mathbb{R}$, $y = -4z$, $x = y + z = -4z + z = -3z$.

F4. (Hf) Határozzuk meg a paraméter függvényében az egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned} -x_1 & - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & + cx_4 = 0 \end{aligned}$$

Megoldás [F4].

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & c & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 + s_1 \\ s_4 + 3s_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_2 \leftrightarrow s_3 \\ \sim \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_3 + 2s_2 \\ \sim \end{array} \\ & \sim \begin{array}{l} s_3 + 2s_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_3 / (-5) \\ \sim \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_4 + 6s_3 \\ \sim \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-9 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ha $c \neq 9$, akkor csak egy darab egyértelmű megoldás van, ez a triviális megoldás $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Ha $c = 9$, akkor lentől olvasva az egyenleteket $x_3 = 2x_4$, $x_2 = -x_4$ és $x_1 = -2x_3 + x_4 = -4x_4 + x_4 = -3x_4$.

Opcionális(ha marad idő)

F5. Határozzuk meg a paraméterek függvényében az egyenletrendszer megoldásainak számát! Mikor nincs megoldás?

$$3x + 5y - z = 1$$

$$x + ay + 2z = 2$$

$$x + 9y - 5z = b$$

Megoldás [F5]. Ha $a = -2$, de $b \neq -3$, akkor nincs megoldás. Ha $a = -2$ és $b = -3$, akkor végtelen sok megoldás van. Ha $a \neq -2$, akkor b értékétől függően pontosan egy megoldás van.