8. Gyakorlat - Megoldások
Sajátértékek, sajátvektorok, diagonalizálás

F1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F1]. (a) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 3\cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 2$.

Egy λ sajátértékhez a sajátvektort az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E_n} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = -1$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x = y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

$\lambda_2 = 2$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x = 2y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{aligned} &(-1-\lambda)\Big((-\lambda)(2-\lambda) - 2\Big) + 1\cdot(-2-2\lambda) = \\ &= (-1-\lambda)\Big(-\lambda^2 + 2\lambda\Big) = (-1-\lambda)\lambda(2-\lambda), \end{aligned}$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 2$.

Egy λ sajátértékhez a sajátérvektort az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = -1$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} - & 2y- & 2z & = 0, \\ & y+ & z & = 0, \\ x+ & 2y+ & 3z & = 0. \end{array}$$

Tehát $y = -z$, ezért $x = -2y - 3z = 2z - 3z = -z$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -x- & 2y- & 2z & = 0, \\ & & z & = 0, \\ x+ & 2y+ & 2z & = 0. \end{array}$$

Tehát $z = 0$, és $x = -2y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -3x- & 2y- & 2z & = 0, \\ - & 2y+ & z & = 0, \\ x+ & 2y & & = 0. \end{array}.$$

Tehát $x + z = 0$, $z = -x$, ezért $-x - 2y = 0$, $y = -\frac{1}{2}x$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \\ -x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

F2. (Hf) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F2].

$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{s} = (x, x, x)$, ha $x \neq 0$,
$\lambda_2 = -1, \quad \mathbf{s} = (x, 0, x)$, ha $x \neq 0$,
$\lambda_3 = 2, \quad \mathbf{s} = (-y, y, 0)$, ha $y \neq 0$.

Mivel különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak, ezért sajátvektorokból álló bázis például

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

F3. Adjunk meg a mátrixokhoz tartozó sajátvektorokból álló bázist, majd diagonalizáljuk a mátrixot.

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F3].

(a) Az **F1**(a)-ban kiszámoltak alapján független sajátvektorok például az

$$\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{s_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ennek a bázisnak a bázisváltó mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix inverze $\mathbf{B^{-1}} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Így a diagonalizáció

$$\mathbf{B^{-1}AB} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\Big((1-\lambda)^2 - 9\Big) = (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4).$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ és $\lambda_3 = 4$.

A sajátvektorok $\lambda_1 = 1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrl} & - & 3z & = 0, \\ & & 0 & = 0, \\ -3x & & & = 0. \end{array}$$

Tehát $x = z = 0$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = -2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrl} 3x & - & 3z & = 0, \\ & 3y & & = 0, \\ -3x & + & 3z & = 0. \end{array}$$

Így $y = 0$, és $z = x$, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 4$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrl} -3x & - & 3z & = 0, \\ - & 3y & & = 0, \\ -3x & - & 3z & = 0. \end{array} .$$

Tehát $x + z = 0$, $z = -x$ és $y = 0$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ortonormált bázis adható meg

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ezért a bázisváltó mátrix könnyen invertálható

$$\mathbf{B^{-1}} = \mathbf{B^T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor a diagonális alak

$$\mathbf{B^{-1}AB} = \mathbf{B^T AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Opcionális(ha marad idő)

F4. Az alábbi mátrix mely sajátérétkéhez tartozik a $(3, 0, -2)$ sajátvektor?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F4]. A $\lambda = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.