9. Gyakorlat - Megoldások
Többváltozós függvények deriválása

F1. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait.

(a) $f(x,y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1$,

(b) $f(x,y) = e^{x^2+y^3}$,

(c) $f(x,y,z) = xe^{-y}\,\mathrm{tg}(z)$.

Megoldás [F1].

(a)
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 - 5\cdot 2xy - y = 3x^2 - 10xy - y \\ f'_y(x,y) &= -5x^2 - x + 3\cdot 6y^5 = -5x^2 - x + 18y^5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{x^2+y^3}\cdot 2x \\ f'_y(x,y) &= e^{x^2+y^3}\cdot 3y^2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= e^{-y}\,\mathrm{tg}(z) \\ f'_y(x,y,z) &= -xe^{-y}\,\mathrm{tg}(z) \\ f'_z(x,y,z) &= xe^{-y}\frac{1}{\cos^2(z)} \end{aligned}$$

F2. (Hf) Számítsuk ki az $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

Megoldás [F2]. $f'_x(x,y) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{y^2+x^2}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{y^2+x^2}$.

F3. Írjuk fel az adott pontban az alábbi felületek érintősíkját.

(a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$; $P(1,-2)$,

(b) $f(x,y) = x\ln(x+y)$; $P(-2,3)$.

Megoldás [F3].

(a) $f'_x(x,y) = 2x + 3y$, ami a P pontban $f'_x(1,-2) = 2 - 6 = -4$

$f'_y(x,y) = 3x + 2y$, ami a P pontban $f'_y(1,-2) = 3 - 4 = -1$

$f(1,-2) = 1 - 6 + 4 = -1$

Így a P-beli érintősík egyenlete:

$$z = (-4)(x-1) + (-1)(y+2) - 1$$
$$4x + y + z = 1$$

(b) $f'_x(x,y) = \ln(x+y) + x\dfrac{1}{x+y}$, ami a P pontban $f'_x(-2,3) = 0 + (-2)\cdot 1 = -2$

$f'_y(x,y) = x\dfrac{1}{x+y}$, ami a P pontban $f'_y(-2,3) = (-2)\cdot 1 = -2$

$f(-2,3) = -2\cdot 0 = 0$

Így a P-beli érintősík egyenlete:

$$z = (-2)(x+2) + (-2)(y-3) + 0$$
$$2x + 2y + z = 2$$

F4. (Hf) Írjuk fel az $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{e^{y-1}}$ függvény érintősíkját a $P(3,1)$ pontban.

Megoldás [F4]. $z = \dfrac{1}{2}(x-3) - (y-1) + 1.$

F5. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott pontban.

(*a*) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15 \quad P(3,2); \quad \mathbf{v} = (2,-4),$

(*b*) $f(x,y) = \operatorname{tg}(2x+y) \quad P\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right); \quad \varphi = 225°.$

Megoldás [F5].

(a) Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = 4x - 3y$$
$$f'_y(x,y) = -3x + 2y$$

Ezek értéke a $P(3,2)$ pontban: $f'_x(3,2) = 12 - 6 = 6$ és $f'_y(3,2) = -9 + 4 = -5$. Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathbf{grad} f(P) = (6,-5)$. A $\mathbf{v}$ vektor iránya:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle \mathbf{grad} f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle (6,-5), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

(b) Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)} \cdot 2$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)}$$

Ezek értéke a P pontban: $f'_x(P) = 8$ és $f'_y(P) = 4$, mivel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathbf{grad} f(P) = (8,4)$. Ebben az esetben vektor helyett szöggel adjuk meg az irányt. Ez azt jelenti, hogy az irányvektor ezt a szöget zárja be az x tengellyel, azaz az irányvektor:

$$\mathbf{e} = (\cos(225°), \sin(225°)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke ebben az esetben is a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle \mathbf{grad} f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle (8,4), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = -\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$$

F6. Az $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

Megoldás [F6]. A vízcsepp nyilván arra fog elindulni, amerre a leginkább lejt a felület, azaz amerre a legkisebb az iránymenti derivált, azaz a gradienssel ellentétes irányba. Számoljuk ki a gradienst! A parciális deriváltak kiszámításához a függvényt $f(x,y) = y^3 e^{-2x-1}$ alakba írjuk.

$$f'_x(x,y) = y^3 e^{-2x-1}(-2)$$
$$f'_y(x,y) = 3y^2 e^{-2x-1}$$

A $P = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ pontban az értékük: $f'_x(P) = -2$, illetve $f'_y(P) = 3$. Így $\mathbf{grad} f(P) = (-2,3)$, a csepp az ezzel ellentétes irányba, azaz a $(2,-3)$ irányba fog elindulni. A maximális lejtés a gradiens irányával ellentétes, értéke a gradiens vektor hosszának ellentetje, ami

$$-|(-2,3)| = -\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = -\sqrt{13},$$

hiszen a $\mathbf{v} = (2,-3)$ irányban az iránymenti derivált

$$f'_{\mathbf{v}}(P) = \langle \mathbf{grad} f(P), \mathbf{v}_0 \rangle = \left\langle (-2,3), \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \right\rangle = \frac{-4}{\sqrt{13}} + \frac{-9}{\sqrt{13}} = -\frac{13}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}.$$

F7. (Hf) Legyen $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4y}$. Számítsuk ki a $P(4,3)$ pontban az iránymenti derivált minimumát és maximumát.

Megoldás [F7]. minimum: $-\sqrt{5}$, maximum: $\sqrt{5}$