10. Gyakorlat - Megoldások
Lokális szélsőértékek

F1. Írjuk fel az $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+2yz, \sqrt{x}+\ln(z))$ függvény $(4,3,1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.
Megoldás [F1]. Az $\mathbf{f}$ függvény komponensfüggvényei:

$$f_1(x,y,z) = x+2yz$$
$$f_2(x,y,z) = \sqrt{x}+\ln(z)$$

A Jacobi-mátrix ezen függvények parciális deriváltjaiból áll: a sorokban a megfelő komponens függvények parciális deriváltjai, míg az oszlopokban a megfelelő változó szerinti parciális deriváltak vannak. Például a Jacobi-mátrix első sorának második eleme az első komponensfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja, azaz $f'_{1y}(x,y,z) = 2z$. Így a Jacobi-mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2z & 2y \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

Ez a $(4,3,1)$ pontban a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \dfrac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

F2. Legyen $f(x,y) = 3x^2y$, és $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \ln(t)$. Határozzuk meg az $f(x(t),y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.
Megoldás [F2]. Az f függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \end{pmatrix}$$

Míg a $\mathbf{g}: t \mapsto (x(t),y(t)) = (\sin(t),\ln(t))$ függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Az $f\circ\mathbf{g}$ összetett függvény deriváltja a láncszabály szerint $(f\circ\mathbf{g})'(t) = f'(\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{g}'(t)$, ez az esetünkben:

$$(f\circ\mathbf{g})'(t) = f'(\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} 6\sin(t)\ln(t), & 3\sin^2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix} = 6\sin(t)\ln(t)\cos(t) + \frac{3\sin^2(t)}{t}.$$

F3. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$,

(b) $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$,

(c) $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$.

Megoldás [F3]. (a) Először kiszámoljuk a függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 8x + 2y$$
$$f'_y(x, y) = 2x + 10y$$

A következő lépés, hogy megkeressük azokat a pontokat (stacionárius pontok), ahol mindkét parciális derivált nulla:

$$8x + 2y = 0$$
$$2x + 10y = 0$$

Az elsőből $y = -4x$, melyet a második helyettesítve $-38x = 0$, azaz $x = 0$, amiből $y = 0$. (Hivatkozhattunk volna arra is, hogy ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek az együtthatómátrixának a determinánsa nem nulla, így csak az azonosan 0 a megoldás.) Tehát egyetlen stacionárius pont van, a $(0, 0)$. Még meg kell nézni, hogy ez valóban lokális szélsőérték-e, amihez a Hesse-féle determinánst kell felírni a másodrendű parciális deriváltakból.

$$f''_{xx}(x, y) = 8$$
$$f''_{xy}(x, y) = 2$$
$$f''_{yy}(x, y) = 10$$

Ebből a Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 8 \cdot 10 - 2^2 = 76,$$

ami minden pontban pozitív, így a $(0, 0)$ valóban lokális szélsőérték, és mivel $f''_{xx}(x, y) = 8$ pozitív, így lokális minimum. A lokális minimum értéke: $f(0, 0) = 2$.

(b) Ugyanazokat a lépéseket kell megcsinálnunk, mint az (a) feladatban:

$$f'_x(x, y) = 2xy + 2y$$
$$f'_y(x, y) = 4y^3 - 3 + x^2 + 2x$$

A stacionárius pontok a következő egyenleteket kielégítő pontok:

$$2xy + 2y = 0$$
$$4y^3 - 3 + x^2 + 2x = 0$$

Az első egyenletet szorzattá alakíthatjuk: $2y(x+1) = 0$, amiből $y = 0$ vagy $x = -1$. Az $y = 0$ esetben a második egyenlet $-3 + x^2 + 2x = 0$, aminek a két gyöke 1 és -3. Az $x = -1$ esetben a második egyenlet $4y^3 - 3 + 1 - 2 = 0$, azaz $y^3 = 1$, azaz $y = 1$. Tehát három stacionárius pont van: $(1,0)$, $(-3,0)$ és $(-1,1)$. A Hesse-determinánshoz a másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 2y$$
$$f''_{xy}(x,y) = 2x + 2$$
$$f''_{yy}(x,y) = 12y^2$$

Ebből a Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2 = 2y \cdot 12y^2 - (2x+2)^2 = 24y^3 - (2x+2)^2$$

Minden stacionárius pontra kiszámoljuk ezt:
Az $(1,0)$ pontban: $24 \cdot 0 - (2+2)^2 = -16$, ami negatív, tehát ez nem lokális szélsőérték (nyeregpont).
A $(-3,0)$ pontban: $24 \cdot 0 - (2 \cdot (-3) + 2)^2 = -16$, ami negatív, tehát ez sem lokális szélsőérték (nyeregpont).
A $(-1,1)$ pontban: $24 \cdot 1^3 - (2 \cdot (-1) + 2)^2 = 24$, ami pozitív, így ez lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(-1,1) = 2$, ami pozitív, ez lokális minimum. A lokális minimum értéke: $f(-1,1) = 1 - 3 + 1 - 2 = -3$.

(c) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 2 - 2x$$
$$f'_y(x,y) = 2 - e^y$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$2 - 2x = 0$$
$$2 - e^y = 0$$

Ezekből $x = 1$, és $y = \ln(2)$. Tehát az egyetlen stacionárius pont az $(1, \ln(2))$.

$$f''_{xx}(x,y) = -2$$
$$f''_{xy}(x,y) = 0$$
$$f''_{yy}(x,y) = -e^y$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2 = (-2)\cdot(-e^y) - 0^2 = 2e^y,$$

ami az $(1, \ln(2))$ pontban $2 \cdot 2 = 4$, ami pozitív. Mivel $f''_{xx}(1, \ln(2)) = -2$ negatív, így ez lokális maximum. A lokális maximum értéke:

$$f(1, \ln(2)) = 2 + 2 + 2\ln(2) - 1 - 2 = 1 + 2\ln(2).$$

F4. (Hf) Határozzuk meg az $f(x,y) = \dfrac{xy}{27} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ függvény lokális szélsőértékeit.
Megoldás [F4]. $(3,3)$-ban lokális minimum, értéke 1.

F5. Egy $V = 4{,}5\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsineget kelljen felhasználni?
Megoldás [F5]. Legyen a téglatest oldalhosszai a, b, c (deciméterben mérve). Ekkor a térfogat $abc = 4{,}5$, amiből $c = \dfrac{4{,}5}{ab}$. Ha a a leghosszabb oldal, akkor ha hosszában kötjük át a csomagot, akkor annak a hossza $2(a+b)$, és ha keresztben, akkor $2(b+c)$. Mivel keresztben kétszer kötjük át, így összesen

$$2(a+b) + 2\cdot 2(b+c) = 2a + 6b + 4c$$

zsineg szükséges. Felhasználva, hogy $c = \dfrac{4{,}5}{ab}$, a

$$f(a,b) = 2a + 6b + 4c = 2a + 6b + 4\cdot\frac{4{,}5}{ab} = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

függvényt kell minimalizálni. Ezt az eddigi módszerrel tehetjük meg (annyi különbséggel, hogy most a változókat a, b-vel jelöljük). Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_a(a,b) = 2 - \frac{18}{a^2b}$$
$$f'_b(a,b) = 6 - \frac{18}{ab^2}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$2 - \frac{18}{a^2b} = 0$$
$$6 - \frac{18}{ab^2} = 0$$

Ezekből $a^2b = 9$ és $ab^2 = 3$. Ekkor $a^3b^3 = 27$, amiből $ab = \sqrt[3]{27} = 3$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{9}{3} = 3, \qquad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{3}{3} = 1, \qquad c = \frac{4{,}5}{ab} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a,b) = \frac{36}{a^3b}$$
$$f''_{ab}(a,b) = \frac{18}{a^2b^2}$$
$$f''_{bb}(a,b) = \frac{36}{ab^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a,b)f''_{bb}(a,b) - (f''_{ab}(a,b))^2 = \frac{36}{a^3b}\cdot\frac{36}{ab^3} - \left(\frac{18}{a^2b^2}\right)^2 = \frac{36^2-18^2}{a^4b^4},$$

ami pozitív (mivel a, b pozitív). Mivel $f''_{aa}(3,1)$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó csomaghoz kell a lehető legkevesebb zsineg.

F6. Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata 1 m^3. Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

Megoldás [F6]. Jelölje a téglatest oldalait a, b, c méterben mérve. Így a térfogat $abc = 1$, amiből $c = \frac{1}{ab}$. Ha a c a magasság, akkor az alaplap területe ab, míg az oldallapoké ac, illetve bc. Mivel két-két ugyanolyan oldallap van, így a felhasznált anyag:

$$f(a,b) = ab + 2ac + 2bc = ab + 2a\frac{1}{ab} + 2b\frac{1}{ab} = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

Ennek elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_a(a,b) = b - \frac{2}{a^2}$$
$$f'_b(a,b) = a - \frac{2}{b^2}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$b - \frac{2}{a^2} = 0$$
$$a - \frac{2}{b^2} = 0$$

Ezekből $a^2b = 2$, és $ab^2 = 2$. Ekkor $a^3b^3 = 4$, amiből $ab = \sqrt[3]{4}$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \qquad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \qquad c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$
\begin{aligned}
f''_{aa}(a,b) &= \frac{4}{a^3} \\
f''_{ab}(a,b) &= 1 \\
f''_{bb}(a,b) &= \frac{4}{b^3}
\end{aligned}
$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a,b)f''_{bb}(a,b) - (f''_{ab}(a,b))^2 = \frac{4}{a^3}\frac{4}{b^3} - 1,$$

ami a $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$ pontban $3 > 0$. Mivel $f''_{aa}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \dfrac{4}{(\sqrt[3]{2})^3} = 2$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó téglatesthez kell a lehető legkevesebb anyag.

F7. (Hf) Egy 1 m^3 térfogatú téglatest alját és tetejét két rétegben, a többi oldalát egy rétegben befestjük. Milyen hosszúak legyenek a téglatest oldalélei, hogy a lehető legkevesebb festék kelljen ehhez?

Megoldás [F7]. Ha a, b, c jelöli az oldalakat, akkor $abc = 1$ és a festett felület nagysága:

$$4ab + 2bc + 2ac = 4ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

A parciális deriváltak eltűnéséből $a = b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ és $c = \sqrt[3]{4}$. A Hesse-determináns ebben az esetben pozitív, így ez lokális szélsőérték, és mivel f''_{aa} pozitív, így lokális minimum.

Opcionális(ha marad idő)

F8. A $z = 2x^2 + y^2$ felület és a $z = 5$ sík által határolt térrészbe a lehető legnagyobb térfogatú hasábot írjuk. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?