11. Gyakorlat - Megoldások
Sorozatok, numerikus sorok

F1. Állapítsuk meg a sorozatok határértékét.

$$(a)\ \frac{5n^2-3n-1}{n+3}, \qquad (b)\ \sqrt[n]{n+3}, \qquad (c)\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

$$(d)\ \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}, \qquad (e)\ \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}.$$

Megoldás [F1].

(a) n-nel egyszerűsítve:

$$\frac{5n^2-3n-1}{n+3} = \frac{5n-3-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \to \frac{\infty-3+0}{1+0} = \infty$$

(b) A rendőr-elvet fogjuk használni, amihez alulról és felülről becsülünk:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{n} & \leq & \sqrt[n]{n+3} & \leq & \sqrt[n]{2n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1, \end{array}$$

mert $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1\cdot 1 = 1$. Így a rendőrelv szerint $\sqrt[n]{n+3} \to 1$.

(c) Gyöktelenítünk:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{\infty} = 0.$$

(d) A számlálót és a nevezőt is gyöktelenítjük:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} \to \frac{2}{\infty} = 0.$$

(e) $3n$-nel egyszerűsítve, majd felhasználva, hogy $\left(1+\frac{q}{n}\right)^n \to e^q$:

$$\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \left(\frac{1-\frac{1}{3n}}{1+\frac{2}{3n}}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n}\right)^2 \to \left(\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = e^{-2}.$$

F2. (Hf) Számoljuk ki az $a_n = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n+1}$ sorozat határértékét.

Megoldás [F2]. e^5

F3. Írjuk fel az alábbi sorok részletösszeg-sorozatát, konvergensek-e ezek a sorok? Ha igen, akkor mi lesz a sor összege?

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}+3^n}{6^{n+1}}.$$

Megoldás [F3].

(a) A részletösszeg-sorozat:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^N = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}} \to \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

mert $q^n \to 0$, ha $|q|<1$. Így a sor konvergens, és az összege $\frac{3}{2}$.

(b) Az (a) részhez hasonlóan belátható, hogy $|q|<1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ számra, így

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}+3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{6^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^2)^n\cdot 2^{-1}}{6^n\cdot 6} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{6^n\cdot 6} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{12}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{12}.$$

F4. (Hf) Számoljuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^{n-1}}{5^n}$ sor összegét.

Megoldás [F4]. 1

F5. Döntsük el, hogy az alábbi sorok Leibniz típusúak-e. Abszolút konvergensek a sorok?

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Megoldás [F5].

(a) Itt mindhárom Leibniz-feltétel teljesül, hiszen az $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ sorozat csökkenő és nullához tart, így a gyökei is, tehát ez Leibniz-sor, így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

ami divergens, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$. Így a sor nem abszolút konvergens.

(b) Világos, hogy alternáló (felhasználjuk, hogy $\frac{n}{n^2+1} > 0$), a határérték:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{\infty} = 0.$$

A monotonitáshoz az $|a_n|$ és az $|a_{n+1}|$-et kell összehasonlítani:

$$\begin{aligned} |a_n| &\lessgtr |a_{n+1}|, \\ \frac{n}{n^2+1} &\lessgtr \frac{n+1}{(n+1)^2+1}, \\ n(n^2+2n+2) &\lessgtr (n+1)(n^2+1), \\ n^3+2n^2+2n) &\lessgtr n^3+n^2+n+1, \\ n^2+n &\lessgtr 1, \end{aligned}$$

azaz $|a_n| > |a_{n+1}|$, ami azt jelenti, hogy az $|a_n|$ sorozat monoton csökken. (A monotonitást jelen esetben egyszerűbben is láthattuk volna, ha a törtet n-nel egyszerűsítjük).

Tehát ez is egy Leibniz-sor, és így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

sort kell vizsgálni. Mivel

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n},$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ sor is divergens. Tehát az eredeti sor nem abszolút konvergens.

F6. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \qquad (d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n.$$

Megoldás [F6].

(a) A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

így a sor konvergens. Mivel pozitív tagú, így abszolút konvergens is.

(b) Mivel $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n \cdot 2n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{n}$, és a $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor is divergens. Így nem is abszolút konvergens.

(c) Ez is egy Leibniz-sor, mert a logaritmus függvény monoton nő (és $\ln(n) > 0$, ha $n \geq 2$). Az abszoút konvergenciához a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

sort vizsgáljuk. Az $\ln(n) \leq n$ egyenlőtlenségből $\dfrac{1}{\ln(n)} \geq \dfrac{1}{n}$. Mivel a $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n)}$ sor is divergens, azaz a $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sor nem abszolút konvergens.

(d) Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $a_n \to 0$, illetve $|a_n| \to 0$. Ellenőrizzük:

$$|a_n| = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}\right)^n \to \frac{e}{e^4} = e^{-3} \neq 0,$$

így a sor divergens (és nem abszolút konvergens).

F7. (Hf) Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}, \qquad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Megoldás [F7]. (a) abszolút konvergens (b) abszolút konvergens