12. Gyakorlat - Megoldások
Hatványsorok, Taylor-sorok

F1. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát.

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}},\qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n-1}},\qquad (c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n!}.$$

Megoldás [F1].

(a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ és $x_0 = 0$. A konvergenciasugárhoz

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \to 1,$$

így a konvergenciasugár 1. Még meg kell nézni az intervallumon határain, azaz ± 1-ben:
$x = 1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ami divergens.
$x = -1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, ami Leibniz-sor, így konvergens.
Tehát a konvergenciatartomány a $[-1, 1)$ intervallum.

(b) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ és $x_0 = 2$. A konvergenciasugárhoz:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \to \frac{1}{2}.$$

A konvergenciasugár ennek a reciproka, azaz 2. Így a hatványsor a $(0, 4)$ intervallumban biztosan konvergens. A két határpont:
$x = 4$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2$, ami divergens.
$x = 0$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(0-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 2$, ami szintén divergens.
Tehát a konvergenciatartomány a $(0, 4)$ intervallum.

(c) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ és $x_0 = 5$. Ebben az esetben a konvergenciasugarat a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

határértékből számoljuk (a faktoriális miatt a gyökös nem szerencsés). A konvergenciasugár ennek a reciproka, ami 0 esetén azt jelenti, hogy a sugár végtelen, így a hatványsor az egész számegyenesen konvergens.

F2. (Hf) Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x+1)^n}{3^{n+1}}$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás [F2]. $(-4, 2)$

F3. Írjuk fel a megadott függvények $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sorok konvergenciasugarát is.

$$(a) \quad \cos(5x), \quad (b) \quad e^{-x^2}, \quad (c) \quad \frac{x}{4+x^2}, \quad (d) \quad \frac{x+1}{x+3}.$$

Megoldás [F3].

(a) Mivel $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, így

$$\cos(5x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-25)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Mivel a cos függvény hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, így a $\cos(5x)$ függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(b) Mivel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, így

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}.$$

Mivel az e^x hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, így az e^{-x^2} függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(c) Itt azt használjuk fel, hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ha $|x| < 1$.

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{2n+1},$$

ha $\left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1$, azaz $|x| < 2$, ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár 2.

(d) Itt egy kicsit alakítani kell először:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

A $\frac{2}{x+3}$ már hasonló a (c) feladathoz:

$$\frac{2}{x+3} = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}}x^n.$$

Ebből:

$$\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}}x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}}x^n,$$

ahol az utolsó lépésben a konstanstagokat (1-et és az $n = 0$ tagot) összevontuk. A konvergencia-tartomány így $\left|-\frac{x}{3}\right| < 1$, azaz $|x| < 3$, ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár 3.

F4. (Hf) Írjuk fel az $f(x) = x\sin(2x)$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát.

Megoldás [F4]. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}$

F5. Számoljuk ki $\sin(1)$ és $\frac{1}{e}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

Megoldás [F5]. Mivel $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, így

$$\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \ldots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sor egy részletösszegének az összegtől való eltérését a következő tag abszolút értékével becsülhetjük. Mivel három tizedesjegy pontossággal szeretnénk becsülni, így egy ezrednél kisebb hibát szeretnék, azaz ha az $\frac{1}{5040}$ taggal becsülhetünk, akkor

$$\left|\sin 1 - \frac{101}{120}\right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\sin 1 \approx \frac{101}{120} = 0,84166666\ldots$ Valójában $\sin 1 = 0,841470985\ldots$, tehát az első három tizedesjegy tényleg azonos.

Az $\frac{1}{e}$ hasonlóan az $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsorból:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \ldots$$

Ez is egy Leibniz-sor, így hasonlóan becsülhetünk, mint az előző feladatrésznél. Az $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{265}{720}$ részletösszegből

$$\left|\frac{1}{e} - \frac{265}{720}\right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\frac{1}{e} \approx \frac{265}{720} = \frac{53}{144} = 0,3680555\ldots$, míg $\frac{1}{e} = 0,367879441\ldots$. Kerekítve itt is megegyezik az első három tizedesjegy.

F6. (Hf) Számoljuk ki cos(0,1) értékét 2 tizedesjegy pontossággal.

Megoldás [F6]. $1 - \frac{0,1^2}{2} = 0{,}995$ mivel $\frac{1}{6!} = 0,0013\dot{8} < 0,01$