

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**11. előadás:
Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai.**

Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Definíció. Egy $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ komplex szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix **sajátértéke**, ha létezik legalább egy n -dimenziós vektor, jelölje s mely nem a nullvektor és teljesül rá, hogy

$$\mathbf{A}s = \lambda s.$$

Minden ilyen vektort, melyre $s \neq \mathbf{0}$, és kielégíti a fenti mátrixegyenletet, azt az \mathbf{A} mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Definíció. Egy $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ komplex szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix **sajátértéke**, ha létezik legalább egy n -dimenziós vektor, jelölje \mathbf{s} mely nem a nullvektor és teljesül rá, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda \mathbf{s}.$$

Minden ilyen vektort, melyre $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, és kielégíti a fenti mátrixegyenletet, azt az \mathbf{A} mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Következmény. A definícióból rögtön következik, hogy ha \mathbf{s}_1 és \mathbf{s}_2 is sajátvektor egy λ sajátértékhez akkor

- $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ is sajátvektor λ -hoz,
- bármilyen $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ érték esetén $t \cdot \mathbf{s}$ is sajátvektor λ -hoz.

Azaz az egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmazához a nullvektort hozzávéve egy **sajátalteret** kapunk

$$\mathcal{S}_\lambda = \{\mathbf{s} \mid \mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda \mathbf{s}\}.$$

Sajátértékek kiszámítása

Keressük a λ paraméter függvényében a mátrixegyenlet s megoldásvektorait:

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda \mathbf{s}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda \mathbf{E}_n \mathbf{s}, \quad \text{ahol } \mathbf{E}_n \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ egységmátrix,}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \text{ahol } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \text{ nullvektor.}$$

A sajátvektorok tehát egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai.

Ennek a homogén egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól eltérő megoldása ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$), ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sajátértékek kiszámítása

Keressük a λ paraméter függvényében a mátrixegyenlet s megoldásvektorait:

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda \mathbf{s}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda \mathbf{E}_n \mathbf{s}, \quad \text{ahol } \mathbf{E}_n \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ egységmátrix,}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \text{ahol } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \text{ nullvektor.}$$

A sajátvektorok tehát egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai.

Ennek a homogén egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól eltérő megoldása ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$), ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk ennek az egyenletnek, a **karakterisztikus egyenletnek** a gyökeit. Az egyenlet bal oldala λ -nak, mint változónak n -ed fokú polinomja (**karakterisztikus polinom**). A polinom gyökei a mátrix sajátértékei. Ekkor az algebra alaptétele alapján multiplicitással számolva n valós/komplex sajátérték van.

Példa

Keressük meg az alábbi mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Példa

Keressük meg az alábbi mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 = 0.$$

Keressük meg az alábbi mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 = 0.$$

Mivel $\lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$, ezért a mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -3.$$

Keressük a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

Példa

Ha $\lambda_1 = 3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Példa

Ha $\lambda_1 = 3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-4x + 4y = 0$$

$$2x - 2y = 0$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = y$.

Példa

Ha $\lambda_1 = 3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-4x + 4y = 0$$

$$2x - 2y = 0$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = y$. Így a sajátvektorok

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Példa

Ha $\lambda_1 = 3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-4x + 4y = 0$$

$$2x - 2y = 0$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = y$. Így a sajátvektorok

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátértékhez tartozó sajátaltér

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \text{ 1-dimenziós altér, } \mathbb{R}^2 \text{ egy egyenesese.}$$

Példa

Ha $\lambda_2 = -3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{E}_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Példa

Ha $\lambda_2 = -3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{E}_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2x + 4y = 0,$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = -2y$,

Példa

Ha $\lambda_2 = -3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{E}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2x + 4y = 0,$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = -2y$, ezért a sajátvektorok

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Példa

Ha $\lambda_2 = -3$, oldjuk meg

$$(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{E}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2x + 4y = 0,$$

mindkét egyenlet átrendezve $x = -2y$, ezért a sajátvektorok

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátértékhez tartozó sajátaltér

$$\mathcal{S}_{-3} = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{1-dimenziós altér, egyenes } \mathbb{R}^2\text{-ben.}$$

Sajátértékek tulajdonságai

- Sajátértékek lehetnek komplex számok is. Például

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Sajátértékek tulajdonságai

- Sajátértékek lehetnek komplex számok is. Például

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

- Diagonális és háromszögmátrixok sajátértékei az átlóelemek.

Sajátértékek tulajdonságai

- Sajátértékek lehetnek komplex számok is. Például

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

- Diagonális és háromszögmátrixok sajátértékei az átlóelemek.
- Ha a $\lambda = 0$ sajátértéke \mathbf{A} mátrixnak, akkor $\det(\mathbf{A}) = 0$, azaz a mátrix szinguláris, mivel $\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}_n) = 0$.

Sajátértékek tulajdonságai

- Sajátértékek lehetnek komplex számok is. Például

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

- Diagonális és háromszögmátrixok sajátértékei az átlóelemek.
- Ha a $\lambda = 0$ sajátértéke \mathbf{A} mátrixnak, akkor $\det(\mathbf{A}) = 0$, azaz a mátrix szinguláris, mivel $\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}_n) = 0$.
- Ha az \mathbf{A} mátrix sajátértéke $\lambda \neq 0$, akkor az \mathbf{A}^{-1} mátrix sajátértéke $\frac{1}{\lambda}$, mivel

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_n\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{s}.$$

Sajátértékek tulajdonságai

- Sajátértékek lehetnek komplex számok is. Például

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

- Diagonális és háromszögmátrixok sajátértékei az átlóelemek.
- Ha a $\lambda = 0$ sajátértéke \mathbf{A} mátrixnak, akkor $\det(\mathbf{A}) = 0$, azaz a mátrix szinguláris, mivel $\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}_n) = 0$.
- Ha az \mathbf{A} mátrix sajátértéke $\lambda \neq 0$, akkor az \mathbf{A}^{-1} mátrix sajátértéke $\frac{1}{\lambda}$, mivel

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_n\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{s}.$$

- A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak.

Szimmetrikus mátrix sajátértékei, sajátvektorai

Tétel. Szimmetrikus mátrixok sajátértékeire, sajátvektoraira a következők igazak,

- ha \mathbf{A} szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós,
- ha \mathbf{A} egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor \mathbf{A} -nak van n darab, páronként merőleges sajátvektora. (Főtengelytétel)

Szimmetrikus mátrix sajátértékei, sajátvektorai

Tétel. Szimmetrikus mátrixok sajátértékeire, sajátvektoraira a következők igazak,

- ha \mathbf{A} szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós,
- ha \mathbf{A} egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor \mathbf{A} -nak van n darab, páronként merőleges sajátvektora. (Főtengelytétel)

Példa. Keressük a szimmetrikus mátrix sajátértékeit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) ((6 - \lambda)^2 - 4) = \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 12\lambda + 32) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 8) = 0. \end{aligned}$$

A sajátértékek $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 8$.

Példa - Szimmetrikus mátrixok sajátvektorai

Sajátvektorok $\lambda = -2$ esetén $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{array} \right\} x = z = 0 \text{ és } y \in \mathbb{R}.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Példa - Szimmetrikus mátrixok sajátvektorai

Sajátvektorok $\lambda = -2$ esetén $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{array} \right\} x = z = 0 \text{ és } y \in \mathbb{R}.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ha $\lambda = 4$, akkor $(\mathbf{A} - 4\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ -6y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{array} \right\} x = -z \text{ és } y = 0.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Példa - Szimmetrikus mátrixok sajátvektorai

Ha $\lambda = 8$, akkor $(\mathbf{A} - 8\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + 2z = 0 \\ -10y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{array} \right\} x = z \text{ és } y = 0.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Példa - Szimmetrikus mátrixok sajátvektorai

Ha $\lambda = 8$, akkor $(\mathbf{A} - 8\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + 2z = 0 \\ -10y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{array} \right\} x = z \text{ és } y = 0.$$

Így a sajátvektorok: $\mathbf{s} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ekkor a három sajátértékhez tartozó három sajátvektort választva

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

három egymásra páronként merőleges vektor, hiszen skalárszorzatuk nulla.

Ha a szimmetrikus mátrixban nem minden sajátérték különböző, akkor óvatosan kell vektorokat választani, de akkor is tudunk páronként merőleges vektorokat választani!