Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

12. elődás:
Mátrixok diagonalizálása.

Definíció. Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix diagonalizálható, ha található hozzá olyan $\mathbf{B}$ invertálható négyzetes mátrix, hogy $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$ diagonális.

Tétel. Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n darab lineárisan független sajátvektora.

Korábbi példában: mivel különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorokat tudunk választani, ezért válasszunk egy új bázist, ami a mátrix sajátvektoraiból áll.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 = 3, & \mathbf{s} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \lambda_2 = -3, & \mathbf{s} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mátrix felírása a sajátvektorok bázisában

Egy $\mathbf{v}$ vektor új bázisban vett koordinátáit kifejezhetjük

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{v}_{\mathcal{B}},$$

ahol $\mathbf{B}$ a báziscsere mátrixa, tehát az új vektor

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{v}, \text{ itt } \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tehát } \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Egy $\mathbf{A}$ mátrix átírva az új bázisba

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ortogonális mátrixok

Definíció. Egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixot **ortogonális**nak nevezzünk, ha

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^T} = \mathbf{E_n},$$

ahol $\mathbf{E_n}$ az $n \times n$-es egységmátrix, azaz $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^T}$.

Következmény 1. Ortogonális mátrix sor (vagy oszlop) vektorai ortonormált vektorok, azaz egymásra páronként merőleges egységvektorok.

Következmény 2. Ortogonális mátrix inverze a transzponáltja.

Következmény 3. Ha egy $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektoraiból orthonormált bázist tudunk kiválasztani, akkor a sajátvektorok bázisában felírt mátrix diagonális lesz

$$\mathbf{B^T A B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{D_n}.$$

Példa - Szimmetrikus mátrix sajátbázisa

A korábbi példában szereplő mátrix egy sajátbázisa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ezek a vektorok ortogonálisak, de nem ortonormáltak (nem egységnyi hosszúak), ám egy valós számmal szorozva őket sajátvektorok maradnak és lenormálhatjuk őket (leosztunk a hosszal).

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ és } \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}.$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \frac{-4}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Példa - Többszörös sajátértékek szimmetrikus mátrixban

Keressük a szimmetrikus mátrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sajátbázisát!

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2-4\right) = (-1)(\lambda+2)(\lambda-2)^2 = 0.$$

A sajátértékek $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 2$.

Ha $\lambda = -2$, akkor $(\mathbf{A} + 2\,\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{array}\right\} x = y \text{ és } z = 0.$$

Így a sajátvektorok:

$$\mathbf{s} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ha $\lambda = 2$, akkor $(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E}_3)\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} x = -y \text{ és } z \in \mathbb{R}.$$

Így a sajátvektorok:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ITT tudunk három független sajátvektort választani, akik páronként ortogonálisak:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De ez csak speciálisan a mátrix szimmetrikussága miatt van, ez nem mindig lehetséges!

A diagonalizálás szükséges és elégséges feltétele

Jegyezzük meg!

- Nem diagonalizálhatók azok a mátrixok, melyeknek van többszörös sajátértékük, és kevesebb számú lineárisan független sajátvektor van, mint a sajátértékek multiplicitása. Példa nem diagonalizálható mátrixra:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Diagonalizálhatóak például azok az n-edrendű mátrixok, melyeknek n darab különböző sajátértékük van (mivel a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek).

- Diagonalizálhatóak a szimmetrikus mátrixok (akkor is, ha nem minden sajátértékük különböző), méghozzá ortogonális mátrix segítségével.