Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

13. elődás:
Többváltozós függvények definíciója, folytonossága és határértéke.

Bevezetés – Többváltozós függvények

- **(Egyváltozós) valós függvénynek** nevezzük azt az egyértelmű hozzárendelést, melyre

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to R_f \subseteq \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x).$$

- **Kétváltozós valós függvény** az a hozzárendelés, mely az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektorokhoz egy valós számot rendel, azaz

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to R_f \subseteq \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \text{ vagy } z = f(x, y).$$

- Általánosságban egy **többváltozós függvényt** a $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra definiált egyértelmű hozzárendelésnek tekintünk, mely

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to R_f \subseteq \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Példa: Rendeljük hozzá egy 3-dimenziós vektorhoz a hosszát

$$l : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \text{ ahol } (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = l(x, y, z).$$

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvényeket a koordinátasík ponjaihoz hozzárendelnek egy harmadik, valós számot

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) =: z,$$

A leképezés megfelelője a térben az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat. Ezt a függvény **grafikonjának** nevezzük. A grafikont a $z = f(x, y)$ **felületnek** is hívjuk.

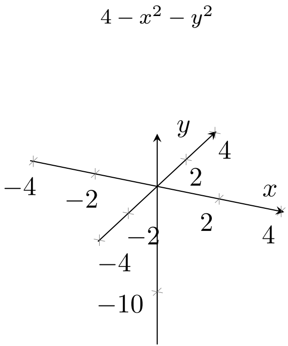
A felületről akkor kapunk pontosabb képet, ha megvizsgáljuk a koordináta síkokkal való **metszetgörbéket**, valamint a **szintvonalakat**.

Definíció. (Szintvonal) Az xy-sík azon pontjainak összességét, melyekben az f függvény ugyanazt a c konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, a függvény **szintvonalának vagy nívóvonalának** nevezzük.

Definíció. (Kontúrvonal) A $z = f(x, y)$ felület egy c konstans értékhez tartozó szintvonala feletti pontjait, az f függvény c értékhez tartozó **kontúrvonalának** nevezzük. A kontúrvonal megkülönböztetendő a szintvonaltól, mert míg az előbbi a felületen helyezkedik el, az utóbbi az xy-síkban van.

Példa

Vizsgáljuk az $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordinátasíkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

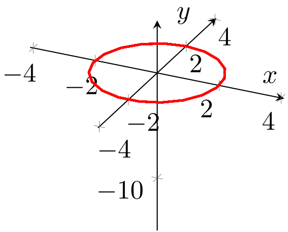


Példa

Vizsgáljuk az $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordinátasíkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x,y) = 0$ kontúrvonal az xy-sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy-síkban.

$4 - x^2 - y^2$



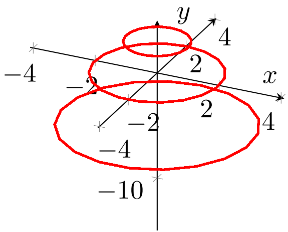
Példa

Vizsgáljuk az $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordinátasíkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x,y) = 0$ kontúrvonal az xy-sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy-síkban.

Hasonlóan az $f(x,y) = 3$ és $f(x,y) = -5$, melyekre $x^2 + y^2 = 1$ ill. 9, azaz a $z = 3$ síkban a $(0,0,3)$ középpontú, 1 sugarú kör, a $z = -5$ síkban a $(0,0,-5)$ középpontú, 3 sugarú kör.

$4 - x^2 - y^2$



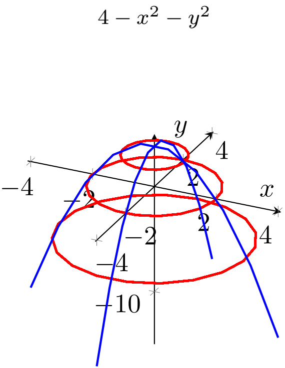
Példa

Vizsgáljuk az $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordinátasíkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x,y) = 0$ kontúrvonal az xy-sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy-síkban.

Hasonlóan az $f(x,y) = 3$ és $f(x,y) = -5$, melyekre $x^2 + y^2 = 1$ ill. 9, azaz a $z = 3$ síkban a $(0,0,3)$ középpontú, 1 sugarú kör, a $z = -5$ síkban a $(0,0,-5)$ középpontú, 3 sugarú kör.

Az $y = 0$ (xz-sík) és $x = 0$ (yz-sík) síkokkal vett metszésgörbék rendre $4 - x^2 = z$ és $4 - y^2 = z$ parabolák, melyek közös csúcspontja a $(0,0,4)$ pont.



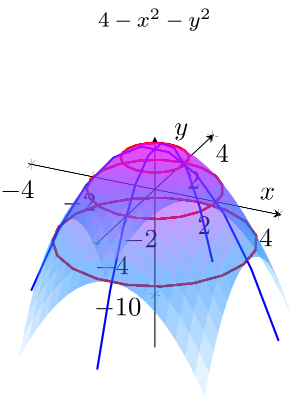
Példa

Vizsgáljuk az $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordinátasíkokkal való metszeteit. Rajzoljuk meg ezek segítségével a függvény grafikonját (a felületet).

Az $f(x,y) = 0$ kontúrvonal az xy-sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 4$, azaz egy origó középpontú, 2 sugarú kör az xy-síkban.

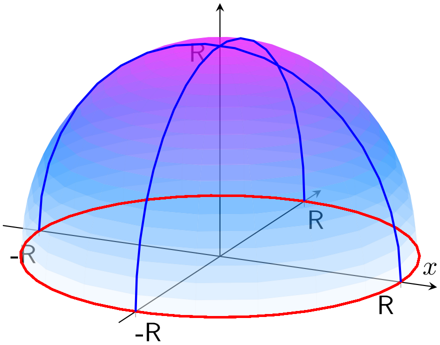
Hasonlóan az $f(x,y) = 3$ és $f(x,y) = -5$, melyekre $x^2 + y^2 = 1$ ill. 9, azaz a $z = 3$ síkban a $(0,0,3)$ középpontú, 1 sugarú kör, a $z = -5$ síkban a $(0,0,-5)$ középpontú, 3 sugarú kör.

Az $y = 0$ (xz-sík) és $x = 0$ (yz-sík) síkokkal vett metszésgörbék rendre $4 - x^2 = z$ és $4 - y^2 = z$ parabolák, melyek közös csúcspontja a $(0,0,4)$ pont.



Egy parabola a z-tengely körül forgatva: forgásparaboloid.

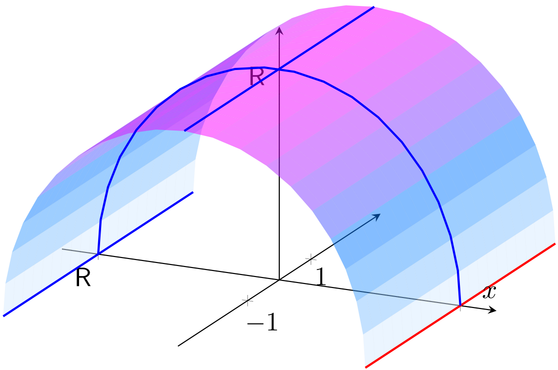
Nevezetes felületek – Gömb



Origó középpontú, R sugarú félgömb.

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

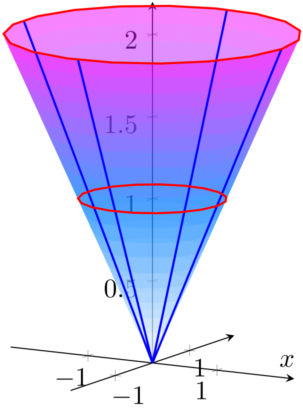
Nevezetes felületek – Hengerfelület



R sugarú henger, melynek forgástengelye az y-tengely.

$$z = \sqrt{R^2 - x^2}$$

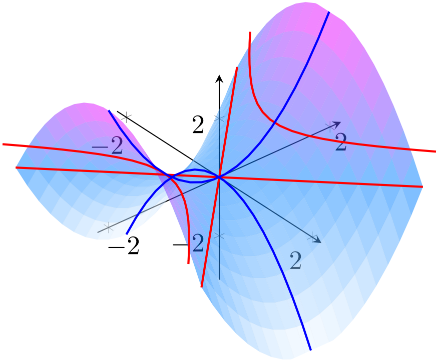
Nevezetes felületek – Forgáskúp



Forgáskúp: ferde egyenes z-tengely körüli forgatása.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nevezetes felületek – Nyeregfelület



Nyeregfelület: hiperbolikus paraboloid.

$$z = y^2 - x^2$$

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény **határértéke az (x_0, y_0) pontban** $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta_\varepsilon > 0$, hogy $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$.

Megjegyzés. Itt fontos, hogy $(x, y) \to (x_0, y_0)$ azt jelenti, hogy mindkét koordinátában tartunk az (x_0, y_0) ponthoz, azaz

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \longrightarrow 0.$$

Definíció. Az f függvény **folytonos** az $(x_0, y_0) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ pontban, ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

A határértéket és a folytonosságot is hasonlóan definiálhatjuk n-változós valós függvények esetében.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2$ határértéket.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2$ határértéket.

Sejthető, hogy a határérték megegyezik a felvett függvényértékkel, azaz $f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ lesz. Ennek igazolására, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor

$$\left|x^2 + y^2 - 0\right| < \varepsilon,$$

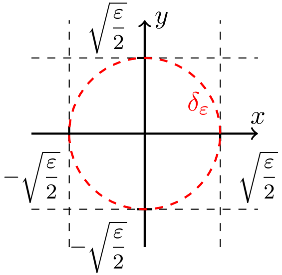
$$\left|x^2 + y^2 - 0\right| < \left|x^2\right| + \left|y^2\right| < \varepsilon$$

így ha teljesül például, hogy

$$|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{és} \quad |y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

tehát egy $(0,0)$ középpontú $2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ oldalhosszúságú négyzeten belül van az (x,y) pont, akkor teljesül a fenti egyenlőtlenség. Ezért legyen

$$\delta_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$



Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$
2) Ha $x = 0$, akkor $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

Példa

Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y=0$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$
2) Ha $x=0$, akkor $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0$
3) Ha $y=x$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}\neq 0$

   SŐT! Ha $y=mx$, akkor

   $$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\neq 0$$

tehát ez a határérték NEM létezhet, mert bármilyen $(0,0)$-hoz közeledés mellett ugyanahhoz az értékhez kellene konvergálnunk.