Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

14. elődás:
Parciális deriváltak.
Gradiens, érintősík.
Iránymenti deriváltak.

Többváltozós függvények parciális deriváltjai

Egy többváltozós, valós értékű függvényt könnyű az egyes változói szerint deriválni. Ilyenkor a többi változót konstansnak tekintjük, csak a szóban forgó változó függvényeként deriváljuk a függvényt.

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in D_f$ helyen x_i szerint parciálisan deriválható, ha az $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ egyváltozós függvény deriválható az $x_i = a_i$ helyen. Jelölés:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \partial_i f(\mathbf{a}).$$

Tehát egy kivételével minden változót konstansnak tekintünk a deriválás szabályaira nézve. Ezt minden változó szerint megtehetjük.

Példa. Számítsuk ki az $f(x, y, z) = x^2 - 3xz + 2y^2z - z^2$ háromváltozós függvény parciális deriváltjait a $(2, 1, 1)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= 2x - 3z & \Rightarrow \quad & f'_x(2, 1, 1) = 4 - 3 = 1 \\ f'_y(x, y, z) &= 4yz & \Rightarrow \quad & f'_y(2, 1, 1) = 4 \\ f'_z(x, y, z) &= -3x + 2y^2 - 2z & \Rightarrow \quad & f'_z(2, 1, 1) = -6 + 2 - 2 = -6 \end{aligned}$$

Kétváltozós függvények parciális deriváltjai

A hagyományos derivált definíció alapján a kétváltozós függvények parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban a következő határértékekkel egyeznek meg

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

A deriváltak értékei tetszőleges $(x, y) \in D_f$ pontban megadják a parciális deriváltakat, azaz

$$f'_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f'_x(x, y),$$

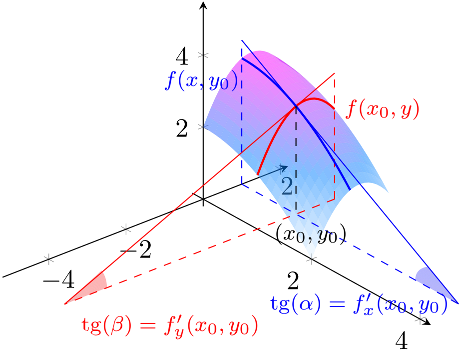
és

$$f'_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f'_y(x, y),$$

függvények általánosan is felírhatóak az $z = f(x, y)$ felülethez.

Kétváltozós függvények parciális deriváltjainak geometriai jelentése

Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli x-szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése nem más, mint a $z=f(x,y)$ felület és az $y=y_0$ sík metszésgörbéjének érintőmeredeksége a pontban. Hasonlóan értelmezhetjük az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli y-szerinti parciális deriváltját.



Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $x_0 \in D_f$ pontjához tartozó érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Kétváltozós függvényre az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénygrafikon (egy felület) adott $(x_0, y_0) \in D_f$ pontjához tartozó **éritősík** egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Látható, hogy a fenti egyenletben az érintősík normálvektora az

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektor lesz, hiszen ezek a változók együtthatói az érintősík egyenletében.

Példa.

Írjuk fel az

$$f(x,y) = x^2y^3 - 3y + 4$$

függvény $(x_0, y_0) = (2,1)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét.

A függvény helyettesítési értéke: $f(2,1) = 4 - 3 + 4 = 5$

A parciális deriváltak értékei:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2xy^3 && \Rightarrow && f'_x(2,1) = 4 \\ f'_y(x,y) &= 3x^2y^2 - 3 && \Rightarrow && f'_y(2,1) = 12 - 3 = 9 \end{aligned}$$

Így az érintősík egyenlete:

$$z = 4(x-2) + 9(y-1) + 5,$$

azaz

$$4x + 9y - z = 12.$$

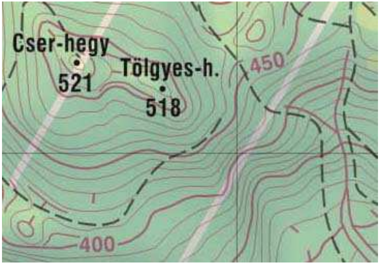
Gradiens

Definíció. Ha egy $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ pontjában mindkét parciális derivált létezik, akkor f pontbeli parciális deriváltjainak vektora a **gradiens**, azaz a

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\big)$$

$2-$dimenziós vektor.

Geometriai jelentése: a gradiens vektor a függvény minden egyes pontjában megadja a legnagyobb meredekség irányát. Pontosan a szintvonalakra merőleges irányba mutat.



Példa

Írjuk fel az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény gradiensét, érintősíkját és az érintősík normálisát az $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ pontban.

Példa

Írjuk fel az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény gradiensét, érintősíkját és az érintősík normálisát az $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ pontban.

Függvényérték: $f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

Parciális deriváltak: $f'_x(x,y)=2x \quad \Rightarrow f'_x\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$$f'_y(x,y)=2y \quad \Rightarrow f'_y\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=1$$

Gradiens: $\mathbf{grad}\, f(x,y)=\nabla f(x,y)=(2x,2y)\Rightarrow \mathbf{grad} f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},1\right)$

Érintősík egyenlete: $z=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)+1\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{16}\Rightarrow z=\frac{1}{2}x+y-\frac{5}{16}$

Érintősík normálvektora: $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$.

Ekkor az $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ ponton áthaladó szintvonal egy kör

$$x^2+y^2=\frac{5}{16}.$$

A körvonal adott pontját és a középpontot összekötő vektor a pont helyvektora $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, mely párhuzamos a gradiensvektorral! Azaz a gradiens a kör sugárirányába, a körérintőre merőlegesen áll.

Iránymenti derivált

A parciális deriváltak megadják, hogy az x- és y-tengelyek irányába vett felületi görbék mentén mennyi az érintők meredeksége.

Hogyan tudnánk az érintő meredekségét egy tetszőleges, nem a tengelyekkel párhuzamos irányban meghatározni?

Iránymenti derivált

A parciális deriváltak megadják, hogy az x- és y-tengelyek irányába vett felületi görbék mentén mennyi az érintők meredeksége.

Hogyan tudnánk az érintő meredekségét egy tetszőleges, nem a tengelyekkel párhuzamos irányban meghatározni?

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontjában a $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ vektor irányába eső **iránymenti deriváltja** az

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) := \left\langle \mathbf{grad} f(x_0, y_0), \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right\rangle = \langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v}^* \rangle$$

skalárszorzat, ahol $\mathbf{v}^* = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (v_x^*, v_y^*)$.

A fenti érték megegyezik az alábbi határértékkel

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f((x_0, y_0) + t\mathbf{v}^*) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{f((x_0 + t \cdot v_x^*, y_0 + t \cdot v_y^*)) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Példa

Írjuk fel az $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$ függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.

Példa

Írjuk fel az $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$ függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.

Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:

$$f'_x(x,y) = 2xy - 3y^3 + 6 \quad \Rightarrow f'_x(1,2) = 4 - 24 + 6 = -14$$

$$f'_y(x,y) = x^2 - 9xy^2 \quad \Rightarrow f'_y(1,2) = 1 - 36 = -35$$

Majd meghatározzuk a $\mathbf{v}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Példa

Írjuk fel az $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$ függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.

Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:

$$f'_x(x,y) = 2xy - 3y^3 + 6 \quad \Rightarrow f'_x(1,2) = 4 - 24 + 6 = -14$$

$$f'_y(x,y) = x^2 - 9xy^2 \quad \Rightarrow f'_y(1,2) = 1 - 36 = -35$$

Majd meghatározzuk a $\mathbf{v}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Az iránymenti derivált meghatározható a gradiens és az adott irányú egységvektor skaláris szorzataként:

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0,y_0) = \langle \mathbf{grad}\, f(x_0,y_0), \mathbf{v}^* \rangle \qquad \Rightarrow$$

$$f'_{(3,4)}(1,2) = \left\langle (-14,-35), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle = \frac{-42-140}{5} = -\frac{182}{5} = -36,4$$

Példa

Ha úgy vesszük, a parciális deriváltak a $\mathbf{v} = (1,0)$ és $\mathbf{v} = (0,1)$ irányokban (x és y tengelyirányokban) az iránymenti deriváltak, így a példában három iránymenti deriváltat számoltunk ki

$$\begin{aligned} f'_{(1,0)}(1,2) =& f'_x(1,2) = -14 \\ f'_{(0,1)}(1,2) =& f'_y(1,2) = -35 \\ f'_{(3,4)}(1,2) =& -36,4 \end{aligned}$$

Azaz mindhárom irányban különböző értékeket kaptunk a felület adott irányú meredekségére. Határozzuk meg minden pontbeli irányra a meredekség értékét általában!

Mivel $|\mathbf{v}^*| = 1$, a skalárszorzat definíciója szerint

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = \langle \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0), \mathbf{v}^* \rangle = |\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)| \cdot 1 \cdot \cos(\alpha).$$

Ahol $0 \leq \alpha \leq 180°$ a $\mathbf{v}$ vektor és a $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ vektor által bezárt pozitív forgásirányú szög. Itt tehát a szorzat értéke az adott gradienshossz megszorozva $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ számmal.

Iránymenti derivált szélsőértéke

A gradiensvektor nagysága adott egy pontban, a példában ez

$$|\mathbf{grad} f(1,2)| = \sqrt{(-14)^2 + (-35)^2} = \sqrt{2121} \approx 46,054,$$

vagyis az iránymenti derivált értékét egyedül a gradienssel bezárt szög koszinusza határozza meg, ezért

- az iránymenti derivált értéke akkor maximális, ha a gradiensvektor irányába számítjuk ki, azaz $\alpha = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = 1$, így $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = |\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)| \cdot 1$, a példában
$$f'_{\mathbf{grad} f(1,2)}(1,2) = f'_{(-14,-35)}(1,2) = \sqrt{2121},$$
- az iránymenti derivált értéke akkor minimális, ha a gradiensvektorral ellenkező irányába számítjuk ki (negatív gradiens irány), azaz $\alpha = 180°, \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = -1$, így $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = |\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)| \cdot -1$, a példában
$$f'_{-\mathbf{grad} f(1,2)}(1,2) = f'_{(14,35)}(1,2) = -\sqrt{2121},$$
- minden más iránymenti derivált ezen két érték között változik
$$-\sqrt{2121} \leq f'_{\mathbf{v}}(1,2) \leq \sqrt{2121}.$$

Iránymenti derivált adott irányszögre

Számítsuk ki az $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ felület $P(1,2)$ pontjában a gradiensre merőleges, majd az x-tengely pozitív felével $\varphi=45^\circ$ szöget bezáró irányban az iránymenti deriváltat.

A parciális deriváltak $f'_x(1,2)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}=\dfrac{2}{5}$ és $f'_y(1,2)=\dfrac{2y}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}$.

A gradiensvektor $\mathbf{grad} f(1,2)=\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$, erre merőleges irányok a

$\mathbf{v_1}=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ és a $\mathbf{v_2}=\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$, ahol $|\mathbf{v_1}|=|\mathbf{v_2}|=\sqrt{\dfrac{16}{25}+\dfrac{4}{25}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$$f'_{\mathbf{v_1}}=\left\langle\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right),\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{8}{5}+\frac{8}{5}\right)=0.$$

Az x-tengely pozitív felével $\varphi=45^\circ$ szöget bezáró irány egységnyi hosszú irányvektora: $\mathbf{v}_\varphi=(\cos(\varphi),\sin(\varphi))=(\cos(45^\circ),\sin(45^\circ))=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f'_\varphi=\left\langle\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle=\frac{6}{5\sqrt{2}}.$$