

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

15. előadás:
Totális deriválhatóság.
Vektor-vektor függvények Jacobi-mátrixa.
Láncszabály.

Ismétlés: differenciálhányados (derivált)

Definíció: Legyen az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ az x_0 környezetében értelmezett. Ha létezik

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányados függvényének határértéke, akkor ezt a határértéket f x_0 -beli **differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Deriválás lineáris átfogalmazása: Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az x_0 pontban differenciálható, és deriváltja x_0 -ban a , ha létezik egy $\varepsilon(h)$ függvény, melyre ha $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, és

$$f(x_0 + h) = a \cdot h + f(x_0) + \varepsilon(h) \cdot h.$$

Tehát a függvény minden $x = x_0 + h$ -ra

$$f(x) = \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}_{\text{érintő: legjobban simuló egyenes}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot (x - x_0)}_{\text{hibatag}}.$$

És az érintő meredeksége pontosan $a = f'(x_0)$.

A totális derivált

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ skalárfüggvény **totálisan differenciálható** az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ belső pontban, ha létezik $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) + \underline{\varepsilon}(\mathbf{h})^T \cdot \mathbf{h},$$

ahol $\underline{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \underline{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Az " \mathbf{a} " vektort az $f(\mathbf{x})$ többváltozós függvény \mathbf{x}_0 pontbeli **totális deriváltjának** nevezzük.

A totális derivált

Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ skalárfüggvény **totálisan differenciálható** az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ belső pontban, ha létezik $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) + \underline{\varepsilon}(\mathbf{h})^T \cdot \mathbf{h},$$

ahol $\underline{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \underline{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

Az " \mathbf{a} " vektort az $f(\mathbf{x})$ többváltozós függvény \mathbf{x}_0 pontbeli **totális deriváltjának** nevezzük.

Speciálisan. Az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvényre, ha $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$, akkor $(x, y) = (x_0 + h_x, y_0 + h_y)$, és

$$f(x, y) = (a_x, a_y) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + f(x_0, y_0) + \underline{\varepsilon}(h_x, h_y)^T \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

ahol $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \underline{\varepsilon}(h_x, h_y) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x(h_x, h_y) \\ \varepsilon_y(h_x, h_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Folytonosság és deriválhatóság kapcsolata

Tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan differenciálható az $(x_0, y_0) \in D_f$ pontban, akkor léteznek a pontbeli parciális deriváltak, és a pontban f totális deriváltja megegyezik a gradienssel, azaz

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = \mathbf{grad}f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)).$$

Tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan deriválható az $(x_0, y_0) \in D_f$ pontban, akkor ott folytonos is.

Tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek az $(x_0, y_0) \in D_f$ pont környezetében léteznek a parciális deriváltjai ÉS folytonosak, akkor a függvény a pontban totálisan differenciálható lesz.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f'_{x_i}(\mathbf{x})$ függvény x_j változó szerinti parciális deriváltja, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i,j -edik **másodrendű parciális deriváltjának** nevezzük.

Jelölés: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \partial_{x_i x_j}^2 f(\mathbf{x}_0) = f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)$.

Speciálisan. Ha f kétváltozós függvény, akkor a másodrendű deriváltjai

$$f''_{xx}(x_0, y_0), \quad f''_{xy}(x_0, y_0), \quad f''_{yx}(x_0, y_0), \quad f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Az így kapott (x_0, y_0) pontot jellemző másodrendű deriváltakat gyakran mátrixalakban tüntetjük fel. Ezt a függvény **Hesse-mátrixának** nevezzük.

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Általánosságban ez a mátrix egy n -változós függvényre $n \times n$ -es lesz, ami

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \left[f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

Példa

Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ függvény másodrendű parciális deriváltjait. Írjuk fel a Hesse-mátrixot általánosan és az $(1, -2)$ pontban is.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - 3y^2 + y \\ f'_y(x, y) = -6xy + x + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(x, y) = 2, & f''_{xx}(1, -2) = 2, \\ f''_{xy}(x, y) = -6y + 1, & f''_{xy}(1, -2) = 13, \\ f''_{yx}(x, y) = -6y + 1, & f''_{yx}(1, -2) = 13, \\ f''_{yy}(x, y) = -6x + 6y, & f''_{yy}(1, -2) = -18. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y + 1 \\ -6y - 1 & -6x + 6y \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{H}_f(1, -2) = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}.$$

Második totális deriválhatóság és Young-tétel

Definíció. Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ totálisan deriválható az \mathbf{x}_0 egy környezetében és az elsőrendű deriváltjai totálisan deriválhatóak \mathbf{x}_0 -ban, akkor f **kétszer totálisan deriválható** \mathbf{x}_0 -ban.

Tétel. (Young) Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ kétszer totálisan deriválható \mathbf{x}_0 -ban, akkor $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : f''_{ij}(\mathbf{x}_0) = f''_{ji}(\mathbf{x}_0)$.

Tétel. (Kétváltozós Young) Ha $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek léteznek a másodrendű parciális deriváltjai, és ezek folytonosak is az $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ pontban, akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Az előző példában pont ez történt $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -6y + 1$ folytonos függvény, minden pontban egyenlő lesz a két vegyes másodrendű derivált.

Következmény. A Young-tétel feltételeit teljesítő függvények Hesse-mátrixa szimmetrikus.

Vektor-vektor függvények

Definíció. Tegyük fel, hogy \mathbf{f} értelmezve van egy $D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektorok egy halmazán, és értékei valós m dimenziós vektorok lesznek, vagyis $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ekkor minden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D_{\mathbf{f}}$ esetén az $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$, tehát

$$\mathbf{f} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Az ilyen \mathbf{f} függvényt **vektor-vektor függvénynek** nevezzük. A függvény i -edik **koordináta-függvénye** pedig $f_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_n)$ skálarfüggvény lesz.

Példa. Az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kétváltozós függvény, melynek függvényértékei kétdimenziós vektorok.

$$\mathbf{f} : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy^3 \end{pmatrix}, \text{ tehát } f_1(x, y) = x^2 - y^2 \text{ és } f_2(x, y) = xy^3,$$

ekkor a függvényérték az $(1, 2)$ pontban $\mathbf{f}(1, 2) = \begin{pmatrix} 1^2 - 2^2 \\ 1 \cdot 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Vektorfüggvények deriválása, totális derivált

Definíció. (totális derivált) Legyen $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektor-vektor függvény és $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a D_f halmaz belsejében egy pont. Az $f(\mathbf{x})$ függvény totálisan deriválható az \mathbf{x}_0 pontban, ha létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix melyre

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + f(\mathbf{x}_0) + \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h},$$

ahol $\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, olyan hogy $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{h}) = \underline{\underline{0}}$. Itt \mathbf{A} valós mátrixot az f függvény \mathbf{x}_0 pontbeli **totális deriváltjának** nevezzük.

Speciálisan. $m = 1$ esetén ez az n változós skalárfüggvények totális differenciálhatóságának definíciója. A totális derivált ekkor mindig egy $1 \times n$ -es mátrix, azaz egy n dimenziós vektor, ami megegyezik a gradienssel.

Vektorfüggvények deriválása, Jacobi mátrix

Definíció. (parciális deriváltak) Legyen $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorvektor függvény és $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $D_{\mathbf{f}}$ halmaz eleme, tehát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

ahol $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az i -edik koordinátafüggvény. Ha \mathbf{f} totálisan deriválható az $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{f}}$ pontban, akkor léteznek az f_i koordinátafüggvényeknek x_j változók szerinti parciális deriváltjai \mathbf{x}_0 -ban. Ezeket mátrixba rendezve kapjuk a függvény \mathbf{x}_0 -ban vett derivált mátrixát, vagy **Jacobi-mátrixát**, azaz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixát.

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixát.

Az \mathbf{f} függvénynek $n = 3$ változója van és $m = 2$ komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3 -as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x, y, z) = xy - z^2$$

- $\partial_x f_1(x, y, z) = y$
- $\partial_y f_1(x, y, z) = x$
- $\partial_z f_1(x, y, z) = -2z$

$$f_2(x, y, z) = x^2 - y^2 + 3z$$

- $\partial_x f_2(x, y, z) = 2x$
- $\partial_y f_2(x, y, z) = -2y$
- $\partial_z f_2(x, y, z) = 3$

Példa

Számítsuk ki az $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixát.

Az \mathbf{f} függvénynek $n = 3$ változója van és $m = 2$ komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3 -as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x, y, z) = xy - z^2$$

- $\partial_x f_1(x, y, z) = y$
- $\partial_y f_1(x, y, z) = x$
- $\partial_z f_1(x, y, z) = -2z$

Tehát a Jacobi-mátrix:

$$f_2(x, y, z) = x^2 - y^2 + 3z$$

- $\partial_x f_2(x, y, z) = 2x$
- $\partial_y f_2(x, y, z) = -2y$
- $\partial_z f_2(x, y, z) = 3$

$$\mathbf{A} = \mathbf{f}'(x, y, z) = \begin{bmatrix} y & x & -2z \\ 2x & -2y & 3 \end{bmatrix}$$

Görbék a felületen

Speciálisan. Válasszunk az xy -síkban egy kétdimenziós görbét, melyet a

$$\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t)) = \mathbf{g}(t)$$

vektorfüggvény ír le. (Vektorfüggvény $n = 1$ változó és $m = 2$ kétdimenziós függvényértékekkel.)

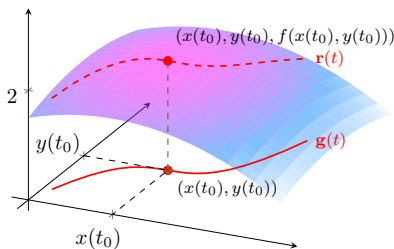
Ekkor egy adott kétváltozós skálár-függvény grafikonján(felületén)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

megjeleníthetjük a görbe pontjait

$$\mathbf{r} : t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

Így az $\mathbf{r}(t)$ függvény egy a felületen futó térgörbét ír le.



A két függvény tehát egymásba ágyazva a felületi görbe pontjainak utolsó koordinátáját adja meg:

$$f \circ \mathbf{g} : t \mapsto f(x(t), y(t)) = f(\mathbf{g}(t)) \in \mathbb{R}.$$

Láncszabály - Deriválás felületi görbék mentén

Összetett függvény deriválási szabálya (láncszabály) valós függvények esetén

$$(f \circ g)'(x_0) = [f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Láncszabály felületi görbékre. Ha a létrehozott felületi görbe meredekségét szeretnénk vizsgálni, akkor

$$\begin{aligned}(f \circ \mathbf{g})'(t_0) &= [f(\mathbf{g}(t_0))]' \stackrel{\text{Láncszabályból}}{=} f'(\mathbf{g}(t_0)) \cdot \mathbf{g}'(t_0) = \\ &= \mathbf{grad} f(x(t_0), y(t_0)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Jelölés: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \\ &= f'_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot \dot{x}(t_0) + f'_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot \dot{y}(t_0).\end{aligned}$$

Hiszen $f(x, y)$ kétváltozós skalárfüggvény Jacobi mátrixa a gradiens, és a $\mathbf{g}(t)$ vektorfüggvény deriváltja a koordinátafüggvények deriváltja, azaz egy 2×1 -es mátrix.

Vegyük észre!

Abban a speciális esetben, mikor $\mathbf{g}(t) = (x_0 + t \cos(\varphi), y_0 + t \sin(\varphi))$, ahol $(x_0, y_0) = \mathbf{g}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ ponton átmenő φ irányszögű egyenes, akkor

$$\begin{aligned}(f(\mathbf{g}(t_0)))' &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \\ &= f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos(\varphi) + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Ami nem más, mint az $f(x, y)$ függvény x -tengely pozitív felével φ szöget bezáró irányban vett iránymenti deriváltja ($f'_\varphi(x_0, y_0)$). Speciálisan, ha

- $\varphi = 0$, $\mathbf{g}(t) = (x_0 + t, y_0)$, az x -tengelyirányú parciális derivált, azaz

$$(f(\mathbf{g}(t_0)))' = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f'_x(x_0, y_0),$$

- $\varphi = 90^\circ$, $\mathbf{g}(t) = (x_0, y_0 + t)$ az y -tengelyirányú parciális derivált, azaz

$$(f(\mathbf{g}(t_0)))' = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f'_y(x_0, y_0).$$

Láncszabály - Általánosan

Láncszabály. Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{g} : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^n$ vektorfüggvények, valamint $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{g}}$ olyan, hogy $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \in D_{\mathbf{f}}$. Legyen továbbá \mathbf{g} differenciálható az \mathbf{x}_0 -ban és \mathbf{f} differenciálható $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ -ban. Ekkor $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható \mathbf{x}_0 -ban, és

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$$

Jacobi-mátrixok szorzata lesz, azaz egy $m \times s$ -es mátrix.

- A hagyományos egyváltozós valós függvények láncszabálya az $s = n = m = 1$ eset.
- A korábban megvizsgált felületi görbék deriválási szabálya az $s = 1 = m, n = 2$ eset.

Példa

Legyen $f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Példa

Legyen $f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x, y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = \left(\frac{1}{3}xy^3, \frac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Példa

Legyen $f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x, y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = \left(\frac{1}{3}xy^3, \frac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Az $f(x, y)$ Jacobi-mátrixa a $\mathbf{g}(t)$ helyen:

$$f'(\mathbf{g}(t)) = f'(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{3}t^3(t^2)^3, \frac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2\right) = \left(\frac{1}{3}t^9, \frac{1}{2}t^{10}\right).$$

Példa

Legyen $f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x, y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = \left(\frac{1}{3}xy^3, \frac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Az $f(x, y)$ Jacobi-mátrixa a $\mathbf{g}(t)$ helyen:

$$f'(\mathbf{g}(t)) = f'(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{3}t^3(t^2)^3, \frac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2\right) = \left(\frac{1}{3}t^9, \frac{1}{2}t^{10}\right).$$

Tehát a láncszabály alapján:

$$(f \circ \mathbf{g})'(t) = \left(\frac{1}{3}t^9, \frac{1}{2}t^{10}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = t^{11} + t^{11} = 2t^{11}.$$

Példa

Legyen $f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $\mathbf{g}(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ \mathbf{g})(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $\mathbf{g}(t)$ Jacobi-mátrixára:

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix},$$

és az $f(x, y)$ Jacobi mátrixára:

$$f'(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = \left(\frac{1}{3}xy^3, \frac{1}{2}x^2y^2\right).$$

Az $f(x, y)$ Jacobi-mátrixa a $\mathbf{g}(t)$ helyen:

$$f'(\mathbf{g}(t)) = f'(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{3}t^3(t^2)^3, \frac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2\right) = \left(\frac{1}{3}t^9, \frac{1}{2}t^{10}\right).$$

Tehát a láncszabály alapján:

$$(f \circ \mathbf{g})'(t) = \left(\frac{1}{3}t^9, \frac{1}{2}t^{10}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = t^{11} + t^{11} = 2t^{11}.$$