Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

16. előadás: Kétváltozós függvények lokális szélsőértékei. Hesse-féle determináns.

Lokális szélsőértékek

Definíció. Egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont **nyílt, ε sugarú környezete** az $\mathbf{x}_0$ középpontú, ε sugarú gömb belseje, azaz

$$K_\varepsilon(\mathbf{x_0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon\}.$$

Definíció. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek **lokális minimuma(maximuma)** van egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha $\mathbf{x}_0$-nak van egy olyan $K_\varepsilon(\mathbf{x_0})$ környezete, hogy minden $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{x_0})$ esetén

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \qquad (f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)).$$

Tétel. (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele) Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor $\mathbf{x}_0$-ban az összes létező parciális deriváltja 0.

Indoklás. A kétváltozós függvények szélsőértékhelyein a felület érintősíkja vízszintes, tehát az érintősík normálvektorának x- és y-koordinátája is 0 kell legyen.

Definíció. Az olyan $\mathbf{x}_0 \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ pontot, melyre az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény összes parciális deriváltja 0, az f **stacionárius pontjának** nevezzük.

Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele

Tétel. (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele) Ha az (x_0, y_0) pontban az $f(x, y)$ függvény olyan, hogy

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{(stacionárius pont)},$$

továbbá a második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, és

$$\det\left(\mathbf{Hesse} f(x_0, y_0)\right) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0,$$

azaz a Hesse-féle mátrix determinánsa pozitív, akkor lokális szélsőértéke van a függvénynek a pontban.

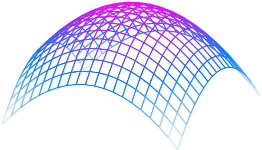
Ekkor

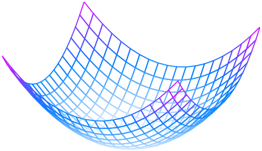
- ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (ugyanakkor $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$), akkor lokális minimuma van,
- a $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (ugyanakkor $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$), akkor lokális maximuma van.

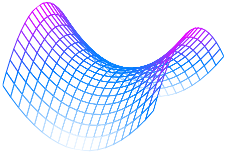
Stacionárius pontok osztályozása

Ha a (x_0, y_0) stacionárius pontja f-nek, azaz

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$







Lokális maximum

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

Lokális minimum

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

$$\left(f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2\right)\Big|_{(x_0,y_0)} > 0$$

Nyeregpont

$$\left(f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2\right)\Big|_{(x_0,y_0)} < 0$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3.$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x,y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3.$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 1 - 9x^2 \quad &&\Rightarrow 1 - 9x^2 = 0 \quad &&\Rightarrow x^2 = \tfrac{1}{9} \quad &&\Rightarrow x = \pm\tfrac{1}{3} \\ f'_y(x,y) &= 4 - 9y^2 \quad &&\Rightarrow 4 - 9y^2 = 0 \quad &&\Rightarrow y^2 = \tfrac{4}{9} \quad &&\Rightarrow y = \pm\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

A stacionárius pontok: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = -18x \qquad f''_{xy}(x,y) = 0 \qquad f''_{yy}(x,y) = -18y$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = (-18x)(-18y) - 0^2 = 324xy$$

$$\text{Így:} \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & 72 > 0; -6 < 0 & \text{lokális maximum, } f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3 \\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) & -72 < 0 & \text{nyeregpont} \\ \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & -72 < 0 & \text{nyeregpont} \\ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) & 72 > 0; 6 > 0 & \text{lokális minimum, } f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y).$$

Példa

Keressük meg a lokális szélsőérték helyeit és számítsuk ki azok értékeit, ha a függvény

$$f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y).$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = (2x-6)(y^2-4y)$$
$$f'_y(x,y) = (x^2-6x)(2y-4)$$

Egy stacionárius pontban mindkettőnek el kell tűnnie. Ha az x szerinti 0:

$$(2x-6)(y^2-4y) = 0$$

$$2x - 6 = 0 \qquad \text{vagy} \qquad y^2 - 4y = 0$$

$$x = 3 \qquad\qquad (y-4)y = 0$$

$$y = 4 \quad y = 0$$

Az y szerinti parciális deriváltból: $(x^2-6x)(2y-4) = 0$.

Ha $x = 3$, akkor $-9(2y-4) = 0, \quad \Rightarrow \quad y = 2.$
Ha $y = 4$, akkor $x = 0$ vagy $x = 6$; ha $y = 0$ akkor $x = 0, 6$ szintén.

Tehát a stacionárius pontok: $(3,2)$, $(0,0)$, $(0,4)$, $(6,0)$, $(6,4)$.

Példa folytatása

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= (2x-6)(y^2-4y) \\ f'_y(x,y) &= (x^2-6x)(2y-4) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2(y^2-4y) \\ f''_{xy}(x,y) &= (2x-6)(2y-4) \\ f''_{yy}(x,y) &= 2(x^2-6x) \end{aligned}$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = 2(y^2-4y)\cdot 2(x^2-6x)-(2x-6)^2(2y-4)^2$$

A stacionárius pontok:

$(3,2)$	$144 > 0$	lokális szélsőérték
$(0,0)$	$-576 < 0$	nyeregpont
$(0,4)$	$-576 < 0$	nyeregpont
$(6,0)$	$-576 < 0$	nyeregpont
$(6,4)$	$-576 < 0$	nyeregpont

Tehát csak a $(3,2)$ pont lokális szélsőérték (többi nyeregpont).

Mivel $f''_{xx}(3,2) = -8 < 0$, így a $(3,2)$ pont lokális maximumhely.
A lokális maximum értéke: $f(3,2) = 36$.

Szöveges szélsőértékszámítási feladat

Géza a pajtája falához egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

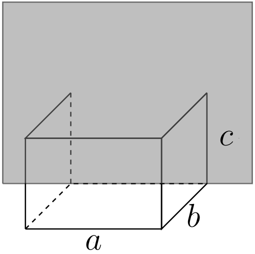
Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Szöveges szélsőértékszámítási feladat

Géza a pajtája falához egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!



Szöveges szélsőértékszámítási feladat

Géza a pajtája falához egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Legyenek az oldalhosszak $a, b, c > 0$. Tudjuk, hogy a térfogat 1

$$1 = abc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{ab}.$$

A felhasznált anyag: $ab + 2bc + ac$. Ezekből a minimalizálandó függvény

$$f(a,b) = ab + \frac{2b}{ab} + \frac{a}{ab} = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}.$$

Szöveges feladat folytatás

$$f(a,b) = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a,b) = b - \frac{2}{a^2} \qquad \Rightarrow b - \frac{2}{a^2} = 0 \qquad \Rightarrow a^2b = 2$$

$$f'_b(a,b) = a - \frac{1}{b^2} \qquad \Rightarrow a - \frac{1}{b^2} = 0 \qquad \Rightarrow ab^2 = 1$$

Amiből $a^3b^3 = 2$, azaz $ab = \sqrt[3]{2}$. Így

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \qquad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Tehát az egyetlen stacionárius pont a $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{aa}(a,b) = \frac{4}{a^3} \qquad f''_{ab}(a,b) = 1 \qquad f''_{bb}(a,b) = \frac{2}{b^3}$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{aa}(a,b) \cdot f''_{bb}(a,b) - \left(f''_{ab}(a,b)\right)^2 = \frac{4}{a^3}\frac{2}{b^3} - 1^2 = \frac{8}{a^3b^3} - 1$$

Ennek az értéke a stacionárius pontban $3 > 0$, így ez lokális szélsőérték.
Mivel $f''_{aa}\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) > 0$, ezért ez lokális minimumhely. Ekkor $c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Szöveges feladat második kérdése

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Ekkor a felhasznált anyag: $ac + 2bc = (a + 2b)c$.

$$f(a, b) = \frac{1}{b} + \frac{2}{a}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = -\frac{2}{a^2} = 0$$
$$f'_b(a, b) = -\frac{1}{b^2} = 0$$

Nincs megoldás.

Magasabb dimenziós eset

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek a $P_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontban a függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_{x_1}(P_0) = f'_{x_2}(P_0) = \cdots = f'_{x_n}(P_0) = 0 \quad (P_0 \text{ stacionárius pont})$$

és

$$f''_{x_1x_1}(P_0), \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & \ldots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \ldots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}$$

- mindegyike pozitív, akkor P_0 lokális minimum.
- váltakozó előjelű és $f''_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor P_0 lokális maximum.