

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

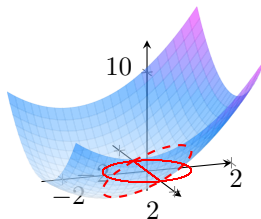
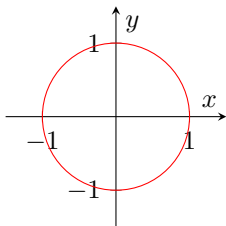
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

17. előadás:
Feltételes szélsőérték számítás,
Lagrange-szorzók.

Bevezető feladat - Feltételes szélsőértékszámítás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

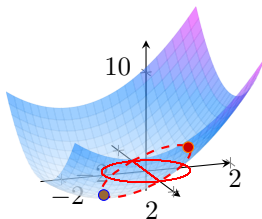
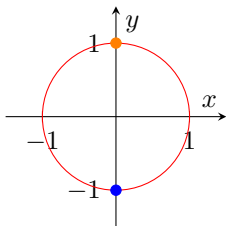
Tehát az adott felület $f(x, y)$ szélsőértékeit "csak" egy felületi görbe, az $x^2 + y^2 = 1$ kör felett elhelyezkedő felületi pontok között keressük.



Bevezető feladat - Feltételes szélsőértékszámítás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Tehát az adott felület $f(x, y)$ szélsőértékeit "csak" egy felületi görbe, az $x^2 + y^2 = 1$ kör felett elhelyezkedő felületi pontok között keressük.



Ha $x^2 + y^2 = 1$, akkor a függvény:

$$f(x, y) = 1 + 2y - 1 = 2y$$

Az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből az is következik, hogy $-1 \leq y \leq 1$, így a függvényérték **minimuma** -2 , ha $y = -1$, és a függvény **maximuma** 2 , ha $y = 1$.

Lagrange-függvény

Feltételes szélsőérték kétváltozós függvényekre. Az $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit keressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett. Ekkor tekintjük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

háromváltozós **Lagrange-függvényt**, ahol λ a **Lagrange-multiplikátor**.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele). Ha az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek léteznek a parciális deriváltjai és folytonosak, és az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ **pontban lokális szélsőértéke van a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett**, továbbá $g(x, y)$ függvény parciális deriváltjai léteznek és nem mind nullák, akkor a megfelelő pontban az $F(x, y, \lambda)$ függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

Megjegyzés. A $F'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0$ feltétel pontosan a szélsőérték-hely keresésének kitűzött feltétele.

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x, y)$ és $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x, y) = 2x$ és $f'_y(x, y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x, y) = 2x$ és $g'_y(x, y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x, y, \lambda)$ praciális deriváltjait

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1$$

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x, y)$ és $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x, y) = 2x$ és $f'_y(x, y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x, y) = 2x$ és $g'_y(x, y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x, y, \lambda)$ praciális deriváltjait

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad g(x, y) = 0 \text{ miatt } = 0$$

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x, y)$ és $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x, y) = 2x$ és $f'_y(x, y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x, y) = 2x$ és $g'_y(x, y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x, y, \lambda)$ praciális deriváltjait a $(0, 1)$ pontban

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x \quad \Rightarrow x = (2\lambda + 2)0 = 0$$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y, \lambda) &= 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2 \quad \Rightarrow y = (2\lambda + 2)1 + 2 = \\ &= 2\lambda + 4 = 0, \text{ ha } \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow g(x, y) = 0 \text{ miatt} = 0$$

Bevezető feladat - Lagrange függvény

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Adott a felület $f(x, y)$ és $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel, így

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ekkor $f'_x(x, y) = 2x$ és $f'_y(x, y) = 2y + 2$ léteznek és folytonosak, továbbá $g'_x(x, y) = 2x$ és $g'_y(x, y) = 2y$ szintén léteznek, és ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor nem lesznek egyszerre nullák.

Vizsgáljuk meg $F(x, y, \lambda)$ praciális deriváltjait a $(0, -1)$ pontban

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = (2\lambda + 2)x \quad \Rightarrow x = (2\lambda + 2)0 = 0$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + 2 + 2\lambda y = (2\lambda + 2)y + 2 \quad \Rightarrow y = (2\lambda + 2)(-1) + 2 = -2\lambda = 0, \text{ ha } \lambda = 0$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow g(x, y) = 0 \text{ miatt } = 0$$

Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele). Ha az (x_0, y_0) pont környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, és $g(x, y)$ függvény parciális deriváltjai léteznek és nem mind nullák, továbbá egy (λ_0, x_0, y_0) stacionárius pontban, ahol

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$$

teljesül, hogy $F(x, y, \lambda)$ Hesse-féle determinánsa

$$\begin{aligned} \det(F(x_0, y_0, \lambda_0)) &= \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)^2 - \\ &\quad - F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_y(x_0, y_0)^2 \end{aligned}$$

- pozitív, akkor **lokális maximuma** van
- negatív, akkor **lokális minimuma** van

az (x_0, y_0) pontban az $f(x, y)$ függvénynek a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett.

(DE HA $g'_x(x_0, y_0) = 0$ és $g'_y(x_0, y_0) = 0$, akkor a determináns 0, nem tudjuk van-e szélsőérték!)

Bevezető példában

A stacionárius pontok $(0, 1, -2)$ és $(0, -1, 0)$, továbbá a másodrendű parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = (2\lambda + 2)x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = (2\lambda + 2)y + 2$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1$$

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda + 2$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda + 2$$

$$F''_{\lambda x}(x, y, \lambda) = 2x$$

$$F''_{\lambda y}(x, y, \lambda) = 2y$$

Így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda + 2 & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda + 2 & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -4x^2(2\lambda + 2) - 4y^2(2\lambda + 2) = -8(x^2 + y^2)(\lambda + 1),$$

– ami a $(0, 1, -2)$ pontban $(-8 \cdot 1 \cdot (-1) = 8)$ pozitív, így itt lokális maximum van,

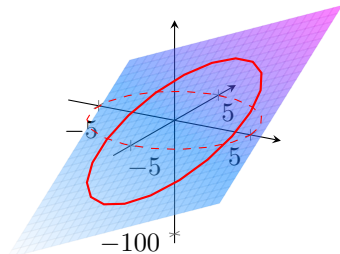
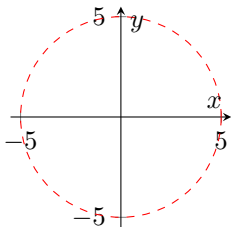
– míg a $(0, -1, 0)$ pontban $(-8 \cdot 1 \cdot 1 = -8)$ negatív, így itt lokális minimum van.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!



Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!

A $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, és így

$$F(x, y, \lambda) = 6x + 8y - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 6 + \lambda \cdot 2x = 6 + 2\lambda x \quad \Rightarrow x = -\frac{6}{2\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 8 + \lambda \cdot 2y = 8 + 2\lambda y \quad \Rightarrow y = -\frac{8}{2\lambda} = -\frac{4}{\lambda}$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve:

$$\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2 = 25, \quad \Rightarrow \frac{25}{\lambda^2} = 25, \quad \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Tehát a stacionárius pontok: $(-3, -4, 1)$ és $(3, 4, -1)$.

Példa folytatása

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{array}{ll} F'_x(x, y, \lambda) = 6 + 2\lambda x & F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda \\ F'_y(x, y, \lambda) = 8 + 2\lambda y & F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25 & \Rightarrow F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda \\ & F''_{\lambda x}(x, y, \lambda) = 2x \\ & F''_{\lambda y}(x, y, \lambda) = 2y \end{array}$$

Így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda,$$

- ami a $(-3, -4, 1)$ pontban negatív, így itt lokális minimum van,
- míg a $(3, 4, -1)$ pontban pozitív, így itt lokális maximum van.

Az adott feltétel mellett a függvény

(lokális) minimuma: $f(-3, -4) = -60$,

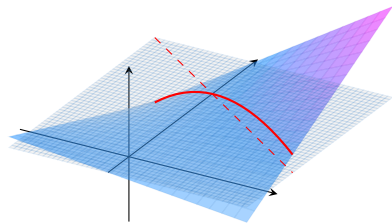
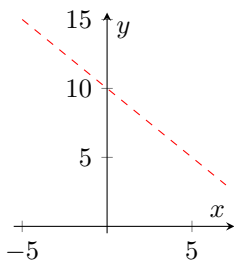
(lokális) maximuma: $f(3, 4) = 40$.

Példa 2.

Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$ -nak, ha $x + y = 10$?

Példa 2.

Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$ -nak, ha $x + y = 10$?



Példa 2.

Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$ -nak, ha $x + y = 10$?

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = x + y - 10$$

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$

A paciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = y + \lambda \quad \Rightarrow y = -\lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda \quad \Rightarrow x = -\lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10 \quad \Rightarrow -\lambda + (-\lambda) - 10 = 0$$

$\lambda = -5$, és így $x = y = 5$. Azaz egyetlen stacionárius pont van: $(5, 5, -5)$.

Hesse-féle determináns itt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Tehát az $(5, 5)$ pont lokális maximumhelye a függvénynek az adott feltétel mellett. A maximum értéke: $f(5, 5) = 25$.

Szélsőérték keresése korlátos és zárt tartományon

Az $f(x, y)$ függvény (abszolút) minimumát és maximumát keressük egy megadott $B = \{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$ tartományon.

Először megkeressük az f függvény lokális szélsőértékeit, melyek közül csak a tartományba esőket vesszük figyelembe. (B belső pontjai között keresünk.)

Majd az f függvény szélsőértékeit megkeressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett a Lagrange-függvénnyel. (B határpontjai között keresünk.)

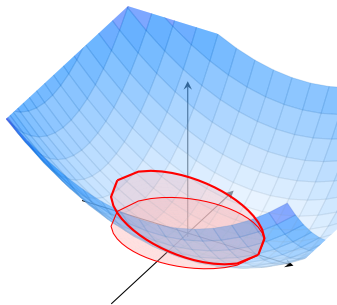
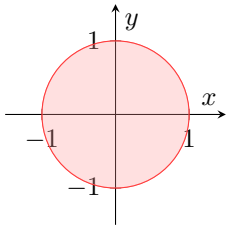
A kapott eredményekből megállapítjuk az abszolút minimumot és maximumot.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egység-körlápon, azaz $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartomány felett.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egységekör lapon, azaz $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartomány felett.



Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egység-körlapon, azaz $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartomány felett.

Először lokális szélsőértékeket keresünk. Ehhez a parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2x - 1,$$

$$f'_y(x, y) = 2y.$$

Egyetlen stacionárius pont van: $(\frac{1}{2}, 0)$, mely a tartományba esik.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0,$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2.$$

A Hesse-determináns $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, tehát az $(\frac{1}{2}, 0)$ lokális szélsőérték, mégpedig lokális minimum ($2 > 0$).

A lokális minimum értéke: $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$.

Példa folytatása

A Lagrange függvény

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

A paciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x - 1 + \lambda 2x,$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda 2y,$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1.$$

Ha $F'_y(x, y, \lambda)$ eltűnik, akkor $y = 0$ vagy $\lambda = -1$, viszont az utóbbi esetben $F'_x(x, y, \lambda) = -1$. Tehát $y = 0$ és a harmadik egyenletből $x = \pm 1$. A stacionárius pontok tehát: $(1, 0, -\frac{1}{2})$, $(-1, 0, -\frac{3}{2})$.

A Hesse-determináns

$$\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2+2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -(2x)^2(2+2\lambda) - (2y)^2(2+2\lambda) = -8(1+\lambda)(x^2+y^2).$$

A $(1, 0, -\frac{1}{2})$ lokális minimumhely, értéke: $f(1, 0) = 0$.

A $(-1, 0, -\frac{3}{2})$ lokális maximumhely, értéke: $f(-1, 0) = 2$.

A függvény abszolút minimuma $-\frac{1}{4}$, míg abszolút maximuma 2.