

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

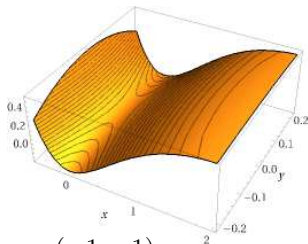
18. előadás – gyakorlás
Parciális deriváltak, gradiens, érintősíék.
Íránymenti deriváltak.
Lokális szélsőértékek, Lagrange-szorzók.

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Számítsuk ki a parciális deriváltakat.
- b) Írjuk fel a gradiensvektort a $(0, 2)$ pontban.
- c) Írjuk fel az érintősík egyenletét a $(0, 2)$ pontban.
- d) Adjuk meg a $(0, 2)$ pontban a $\mathbf{v} = (1, 2)$ és a $\mathbf{w} = (-1, -1)$ irányokban az iránymenti deriváltakat.
- e) Van-e olyan pont, ahol vízszintes az érintősík?
- f) Adjuk meg a Hesse-mátrixot. Számítsuk ki a $(0, 2)$ és a stacionárius pontokban a determinánst!



Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Számítsuk ki a parciális deriváltakat.

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Számítsuk ki a parciális deriváltakat.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = (e^{-x}(x^2 - 3y^2))'_x = -\frac{(x^2 - 3y^2)}{e^x} + \frac{2x}{e^x} = \frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x}$$

$$f'_y(x, y) = (e^{-x}(x^2 - 3y^2))'_y = e^{-x}(-6y) = -\frac{6y}{e^x}$$

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \left(\frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x}, -\frac{6y}{e^x} \right)$$

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Írjuk fel a gradiensvektort a $(0, 2)$ pontban.

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Írjuk fel a gradiensvektort a $(0, 2)$ pontban.

A parciális deriváltak értékei:

$$f'_x(0, 2) = \left. \frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x} \right|_{(0,2)} = \frac{-0^2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2^2}{e^0} = 12$$

$$f'_y(0, 2) = \left. -\frac{6y}{e^x} \right|_{(0,2)} = -\frac{6 \cdot 2}{e^0} = -12$$

Így a gradiens vektor:

$$\mathbf{grad} f(0, 2) = (12, -12)$$

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Írjuk fel az érintősík egyenletét a $(0, 2)$ pontban.

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Írjuk fel az érintősík egyenletét a $(0, 2)$ pontban.

A függvény helyettesítési értéke: $f(0, 2) = \frac{0^2 - 3 \cdot 2^2}{e^0} = \frac{-12}{1} = -12.$

A gradiens vektor: $\text{grad} f(0, 2) = (12, -12).$

Így az érintősík egyenlete:

$$z = 12(x - 0) - 12(y - 2) - 12,$$

azaz

$$-12x + 12y + z = 12.$$

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- d) Adjuk meg a $(0, 2)$ pontban a $\mathbf{v} = (1, 2)$ és a $\mathbf{w} = (-1, -1)$ irányokban az iránymenti deriváltakat.

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

d) Adjuk meg a $(0, 2)$ pontban a $\mathbf{v} = (1, 2)$ és a $\mathbf{w} = (-1, -1)$ irányokban az iránymenti deriváltakat.

A gradiens vektor: $\mathbf{grad} f(0, 2) = (12, -12)$.

Ha $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, akkor

$$f'_{\mathbf{v}}(0, 2) = \left\langle (12, -12), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = \frac{12-24}{\sqrt{5}} = \frac{-12}{\sqrt{5}} \approx -3,67.$$

Ha $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{(-1, -1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, akkor

$$f'_{\mathbf{w}}(0, 2) = \left\langle (12, -12), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{-12+12}{\sqrt{2}} = 0.$$

Mivel $\mathbf{w} = (-1, -1)$ pont a gradiensre merőleges irány, ezért itt a szintvonal érintőirányában nulla a meredekség.

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

e) Van-e olyan pont, ahol vízszintes az érintősíki?

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

e) Van-e olyan pont, ahol vízszintes az érintősík?

Az érintősík ott lehet vízszintes, ahol a parciális deriváltak nullák, azaz:

$$f'_x(x, y) = \frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x} = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(x, y) = -\frac{6y}{e^x} = 0$$

$$\begin{array}{ll} -x^2 + 2x + 3y^2 = 0 & y = 0, \text{ és } -x^2 + 2x = 0; \\ -6y = 0 & \text{akkor, ha} \quad \text{azaz } y = 0 \text{ és } x = 0, \\ & \text{vagy } y = 0 \text{ és } x = 2. \end{array}$$

Tehát a $P(0, 0)$ és a $Q(2, 0)$ pontokban lesz vízszintes az érintősík, ($z = 0$ és $z = 4$ síkok).

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- f*) Adjuk meg a Hesse-mátrixot. Számítsuk ki a $(0, 2)$ és a stacionárius pontokban a determinánst!

Példa 1.

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{e^x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

f) Adjuk meg a Hesse-mátrixot. Számítsuk ki a $(0, 2)$ és a stacionárius pontokban a determinánst!

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f'_{xx}(x, y) = \left(\frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x} \right)'_x = -\frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x} + \frac{-2x + 2}{e^x} = \frac{x^2 - 4x - 3y^2 + 2}{e^x};$$

$$f'_{xy}(x, y) = \left(\frac{-x^2 + 2x + 3y^2}{e^x} \right)'_y = \frac{6y}{e^x}; \quad f'_{yy}(x, y) = \left(-\frac{6y}{e^x} \right)'_y = -\frac{6}{e^x}$$

$$\det(\mathbf{Hesse}f(0, 0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12; \quad \det(\mathbf{Hesse}f(2, 0)) = \begin{vmatrix} \frac{-2}{e^2} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{e^2} \end{vmatrix} = \frac{12}{e^4}$$

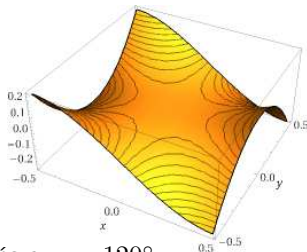
Azaz a $P(0, 0)$ pontban a függvénynek nyeregpontja van, még a $Q(2, 0)$ pontban lokális maximuma, mert $f'_{xx}(x, y) < 0$.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Számítsuk ki a parciális deriváltakat az $(1, -3)$ pontban.
- b) Írjuk fel az érintősík egyenletét az $(1, -3)$ pontban.
- c) Adjuk meg az $(1, -3)$ pontban a $\mathbf{v} = (-3, 2)$ és a $\varphi = 120^\circ$ irányokban az iránymenti deriváltakat.
- d) Számítsuk ki az iránymenti deriváltak maximális és minimális értékét is az $(1, -3)$ pontban.
- e) Az $x = y^2$ feltétel mellett keressük meg a függvény szélsőértékeit.



Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Számítsuk ki a parciális deriváltakat az $(1, -3)$ pontban.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Számítsuk ki a parciális deriváltakat az $(1, -3)$ pontban.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(1, -3) = (x^3 - 3xy^2)'_x \Big|_{(1, -3)} = 3x^2 - 3y^2 \Big|_{(1, -3)} = 3 - 27 = -24$$

$$f'_y(1, -3) = (x^3 - 3xy^2)'_y \Big|_{(1, -3)} = -6xy \Big|_{(1, -3)} = -6 \cdot 1 \cdot (-3) = 18$$

$$\mathbf{grad} f(1, -3) = (3x^2 - 3y^2, -6xy) \Big|_{(1, -3)} = (-24, 18)$$

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Írjuk fel az érintősík egyenletét az $(1, -3)$ pontban.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Írjuk fel az érintősík egyenletét az $(1, -3)$ pontban.

$$f'_x(1, -3) = -24 \text{ és } f'_y(1, -3) = 18 \text{ továbbá}$$

$$f(1, -3) = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot (-3)^2 = 1 - 27 = -26.$$

Így az érintősík egyenlete:

$$z = (-24)(x - 1) + 18(y + 3) - 26$$

$$z = -24x + 24 + 18y + 54 - 26$$

$$z = -24x + 18y + 52$$

$$24x - 18y + z = 52$$

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- c) Adjuk meg az $(1, -3)$ pontban a $\mathbf{v} = (-3, 2)$ és a $\varphi = 120^\circ$ irányokban az iránymenti deriváltakat.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- c) Adjuk meg az $(1, -3)$ pontban a $\mathbf{v} = (-3, 2)$ és a $\varphi = 120^\circ$ irányokban az iránymenti deriváltakat.

A gradiens vektor: $\mathbf{grad} f(1, -3) = (-24, 18)$.

Ha $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(-3, 2)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$, akkor

$$f'_{\mathbf{v}}(1, -3) = \left\langle (-24, 18), \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \right\rangle = \frac{72+36}{\sqrt{13}} = \frac{108}{\sqrt{13}} \approx 29,95.$$

Ha $\varphi = 120^\circ$ akkor az irányvektor $\mathbf{w} = (\cos(120^\circ), \sin(120^\circ)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$,

akkor

$$f'_{\varphi}(1, -3) = \left\langle (-24, 18), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = \frac{24+18\sqrt{3}}{2} \approx 27,59.$$

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- d) Számítsuk ki az iránymenti deriváltak maximális és minimális értékét is az $(1, -3)$ pontban.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- d) Számítsuk ki az iránymenti deriváltak maximális és minimális értékét is az $(1, -3)$ pontban.

Mivel az iránymenti derivált maximuma a gradienssel megegyező irányban van, ezért az $\mathbf{u} = (-24, 18)$ irányban lesz az iránymenti derivált maximális.

$$\text{Ha } \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{(-24, 18)}{\sqrt{900}} = \left(\frac{-24}{30}, \frac{18}{30} \right) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5} \right), \text{ akkor}$$

$$f'_{\mathbf{u}}(1, -3) = \left\langle (-24, 18), \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\rangle = \frac{96 + 54}{5} = \frac{150}{5} = 30,$$

ami pont a gradiens hossza $\sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{900} = 30$ lesz.

A gradienssel ellentétes irányban, $-\mathbf{u} = (24, -18)$ az iránymenti derivál értéke minimális, a gradienshossz mínusz egyszerese azaz -30 lesz:

$$f'_{-\mathbf{u}}(1, -3) = \left\langle (-24, 18), \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \right) \right\rangle = \frac{-96 - 54}{5} = \frac{-150}{5} = -30.$$

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

e) Az $x = y^2$ feltétel mellett keressük meg a függvény szélsőértékeit.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

e) Az $x = y^2$ feltétel mellett keressük meg a függvény szélsőértékeit.

A Lagrange függvény: $F(x, y, \lambda) = x^3 - 3xy^2 + \lambda(x - y^2)$.

A paciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 3x^2 - 3y^2 + \lambda = 0,$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = -6xy - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \text{ vagy } \lambda = -3x = -3y^2,$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x - y^2 = 0, \quad \Rightarrow x = y^2,$$

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ és $\lambda = 0$.

Vagy $F'_x(y^2, y, -3y^2) = 0 = 3y^4 - 3y^2 - 3y^2 = 3y^2(y^2 - 2)$,

azaz $y = \pm\sqrt{2}$, $x = 2$, $\lambda = -6$.

Így stacionárius pontok a $(0, 0, 0)$, $(2, \sqrt{2}, -6)$, $(2, -\sqrt{2}, -6)$.

Példa 2. (Majomnyereg)

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

e) Az $x = y^2$ feltétel mellett keressük meg a függvény szélsőértékeit.

Hesse-determináns

$$\begin{vmatrix} 6x & -6y & 1 \\ -6y & -6 - 2\lambda & -2y \\ 1 & -2y & 0 \end{vmatrix} = 24y^2 - 24xy^2 + 2\lambda + 6.$$

A $(0, 0, 0)$ lokális maximumhely, mert $\det(\mathbf{Hesse}) = 6 > 0$,

$$\text{értéke: } f(0, 0) = 0.$$

A $(2, \sqrt{2}, -6)$ lokális minimumhely, mert $\det(\mathbf{Hesse}) = -54 < 0$,

$$\text{értéke: } f(2, \sqrt{2}) = -4.$$

A $(2, -\sqrt{2}, -6)$ lokális minimumhely, mert $\det(\mathbf{Hesse}) = -54 < 0$,

$$\text{értéke: } f(2, -\sqrt{2}) = -4.$$