

Matematika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavaszi

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

20. előadás:
Numerikus sorok konvergenciája.
Konvergenciakritériumok.
Leibniz-típusú sorok konvergenciája.

Numerikus sorok

Definíció. Legyen $\{a_n\}$ egy numerikus sorozat, ekkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \dots$$

formális végtelen összeget **numerikus sornak** nevezzük. A sor **tagjai** az a_n sorozatelemek. A sor **n -edik részletösszege** az

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

véges összeg. Azt a sorozatot, melynek elemei a sor s_n részletösszegei, a sor $\{s_n\}$ **részletösszeg-sorozatának** nevezzük.

Definíció. A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor **konvergens**, ha a hozzá tartozó $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozat konvergens, és határértékét a sor **összegének** mondjuk. A sor **divergens**, ha $\{s_n\}$ sorozat nem konvergens.

Numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele

Tétel: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Nem bizonyítjuk, de az állítás helytálló, mert ha egy összeg elemei nem csökkenek, mondjuk egy indextől $a_n > k$, akkor végtelen sokszor összeadva a k számot ezzel alulról becsüljük a sorösszeget, ugyanakkor $n \cdot k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ így az összeg nem lehet véges.

- Ha a feltétel nem teljesül, akkor a sor nem lehet konvergens!

Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{3}{n+1}$ nem konvergens, mert $n > 5$ -re $a_n > \frac{1}{2}$.

- Fordítva nem igaz az előbbi tétel: az, hogy az általános tag tart a 0-hoz nem elégséges feltétele a konvergenciának.

Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmónikus sor divergens, bár $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Műveletek numerikus sorokkal

Tétel: Konvergens numerikus sorokkal végezhető műveletek.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok konvergensek, akkor

- szabad bárhová zárójeleket beiktatni (azaz zárójelek segítségével több egymás után következő tagot egy taggá összefoglalni), ezzel sem a konvergencia, sem pedig a sorösszeg nem változik meg,
- szabad véges sok tagot hozzávenni a sorhoz vagy elhagyni belőle, ezzel a konvergencia nem változik, DE a sorösszeg igen!
- szabad a sorokat tagonként összeadni

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n,$$

- szabad a sort tagonként egy számmal beszorozni

$$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n.$$

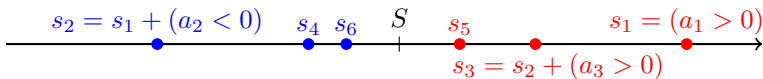
Leibniz-sor

Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sor Leibniz-sor**, vagy Leibniz típusú sor, ha

- a_n sorozat váltakozó előjelű, azaz alternáló,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$,
- $|a_n|$ monoton csökkenő sorozat.

Tétel. Minden Leibniz-sor konvergens.

Szemléltetés:



Példa: Az alternáló harmónikus sor Leibniz-sor, ezért konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Példák

1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Példák

1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk a sorolemek abszolút értékének sorozatát:

$$|a_n| = \frac{n+3}{2n-1}, \text{ amire } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

tehát nem teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, ezért a sor nem lesz konvergens.

Példák

1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk a sorolemek abszolút értékének sorozatát:

$$|a_n| = \frac{n+3}{2n-1}, \text{ amire } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

tehát nem teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, ezért a sor nem lesz konvergens.

2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot \pi)}{\sqrt{n}}$ sor konvergenciáját.

Példák

1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{2n-1}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk a sorolemek abszolút értékek sorozatát:

$$|a_n| = \frac{n+3}{2n-1}, \text{ amire } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

tehát nem teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, ezért a sor nem lesz konvergens.

2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot \pi)}{\sqrt{n}}$ sor konvergenciáját.

Látjuk, hogy a sorozat alternál, mivel $\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$, így vizsgáljuk a sorolemek abszolút értékének sorozatát:

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ amire } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

$$\text{emellett pedig } \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \text{ hiszen } \sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

tehát teljesülnek a Leibniz-sor kritériumai, a sor konvergens.

Pozitív tagú sorok konvergenciája

Definíció. Pozitív tagú sornak nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort, ha minden n -re

$$a_n \geq 0.$$

Megjegyzés. A pozitív tagú sorok részletösszeg sorozata monoton növekedő, azaz

$$s_1 = a_1 \leq s_2 = a_1 + (a_2 \geq 0) \leq s_3 \leq s_4 \leq \dots$$

Tétel. Ha egy pozitív tagú sor divergens, akkor összege ∞ , azaz a végtelenbe tart.

$$\text{Jelölés: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Tétel. Ha egy pozitív tagú sor részletösszegeinek sorozata korlátos, akkor a sor konvergens.

Pozitív tagú sorok konvergencia-kritériumai

Tétel. Legyen $0 \leq a_n \leq b_n$ igaz minden $n > N$ indextől kezdve.

- **Majoráns kritérium.**

Ekkor ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$.

- **Minoráns kritérium.**

Ekkor ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Példa.

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2-n+2}$ sor konvergenciáját.

$$\frac{n-1}{n^2-n+2} \underset{\text{ha } n > 2}{\geq} \frac{\frac{1}{2}n}{n^2} = \frac{1}{2n},$$

azaz a $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor, mely a harmonikus sor $\frac{1}{2}$ -szerese, divergens minoráns sora az eredetinek. Ezért az eredeti sor is divergens.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot,

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot, a többi pedig a nevező csökkentésével ($n \rightarrow (n-1)$) növeljük.

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot, a többi pedig a nevező csökkentésével ($n \rightarrow (n-1)$) növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk,

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1 + 1 = 2$$

Az összegről leválasztjuk az első tagot, a többi pedig a nevező csökkentésével ($n \rightarrow (n-1)$) növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk, ami összegezhető és 1 volt az összeg.

Alkalmazhatjuk tehát a majoráns kritériumot és ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 < \infty$ konvergens.

Hiperharmonikus sorok

Definíció.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ alakú sorokat **hiperharmonikus soroknak** nevezzük.

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $p = 1$ és $p = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $p = 1$ -re divergens, de $p = 2$ -re már konvergens.

Kérdés: Milyen p értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?

Hiperharmonikus sorok

Definíció.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ alakú sorokat **hiperharmonikus soroknak** nevezzük.

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $p = 1$ és $p = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $p = 1$ -re divergens, de $p = 2$ -re már konvergens.

Kérdés: Milyen p értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?

Tétel.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$.

Nem bizonyítjuk, de emlékeztető:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} p > 1 & \frac{1}{p-1} \\ p \leq 1 & \text{divergens} \end{cases}.$$

Példa

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3 - n^2 + 1}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3 - n^2 + 1}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező harmadfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig másodfokú. És az előbbi tétel miatt sejtjük, hogy ez a sor konvergens. Ennek bizonyításához pedig majoráns kritériumot használunk.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3 - n^2 + 1} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - n^2 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - \frac{1}{2}n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Ahol az első egyenlőtlenségnél a számlálót növeltük, a másodiknál pedig a nevezőt csökkentettük. Mindkét esetben nőtt az összegezendő törtek értéke és még így is véges az összeg, tehát eredetileg sem lehetett végtelen.

Hányados kritérium

Tétel. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor. Ekkor ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens lesz,} \\ > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

Ha a határérték éppen 1, akkor a kritérium segítségével nem tudjuk a sor konvergenciáját eldönteni.

Példa. Vizsgáljuk az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

ezért a sor konvergens lesz, bár a sorösszeget nem tudjuk kiszámítani.

Tétel. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor. Ekkor ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens lesz,} \\ > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

Megjegyzés: Ha a_n nem nemnegatív tagú sor, akkor $|a_n|$ -et kell vizsgálni!

Példa. Vizsgáljuk az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor konvergenciáját.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ezért a sor konvergens lesz, bár a sorösszeget nem tudjuk kiszámítani.

Gyök- és Hányados kritérium

A két tétel szerkezete nagyon hasonló, így két kritérium egyszerre működik, vagy nem működik ha a határérték éppen 1.

Bizonyításuk is nagyon hasonló.

Ha egy adott feladatnál az egyik kritérium nem adott eredményt, akkor nem érdemes a másikkal próbálkozni, mert az is 1-et fog adni (ilyenkor más típusú kritériumot kell majd használnunk, pl. minoráns, majoráns). Ezért csupán kényelmi kérdés, hogy egy konkrét feladatnál melyik kritériumot érdemes használni.

Abszolút- és feltételes konvergencia

Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **abszolút konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens.

Tétel. Minden abszolút konvergens sor konvergens is. (Nem biz.)

Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **feltételesen konvergens**, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, ezért feltételesen konvergens.

Példa. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^3}}$ sor konvergenciáját.

Mivel nem pozitív tagú sor, ezért először az abszolútértékek sorát vizsgáljuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n^3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}},$$

ami egy konvergens majoráns sor, hiszen $p = \frac{3}{2} > 1$ kitevőjű hiperharmonikus sor. Tehát a sor abszolút sora konvergens, így a sor abszolút konvergens (és egyben konvergens is).